Algebra Lineal: Vectors i Matrius

Xavier Martinez-Giralt
Universitat Autònoma de Barcelona

1 Introducció

Els models matemàtics utilitzats pels economistes sovint s'expressen en termes de sistemes d'equacions. Si aquestes equacions són totes lineals, l'estudi d'aquest sistema d'equacions pertany a l'àrea de les matemàtiques denominada **àlgebra lineal**.

Quan els sistemes d'equacions són suficientment grans, la seva notació i estudi es veu facilitat si utilitzem una notació adient. Un sistema general de m equacions lineals amb n incògnites que denotem per $x_1, x_2, \ldots, x_n$, el podem escriure de la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1}$$

on $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ es denominen els *coeficients* del sistema, i $b_1, b_2, \ldots, b_m$ es denominen *els cantons de la dreta* de les equacions.

Una **solució** del sistema (1) és un conjunt ordenat de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que satisfa totes les equacions simultàniament quan posem $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$. Normalment escribim una solució com $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Si el sistema (1) te al menys una solució diem que es **consistent**. Quan el sistema no te solució diem que és **inconsistent**.

La forma d'escriure al sistema (1) pren molt temps i és pesat repetir tantes vegades x_1, x_2, etc. i els signes $+$ i $=$ tantes vegades. Una forma alternativa més econòmica d'escriure les equacions és

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{2}$$

L'equació (2) l'hem de pensar com una manera alternativa d'escriure l'equació (1), on les expressions,

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \text{etc.,} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

s'anomenen *vectors* o, a vegades *vectors columna* donat que els seus elements estàn estructurats en forma de columna.

Donat que els vectors de l'equació (2) són objectes matemàtics per ells mateixos, resulta convenient donarlis noms com $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$, i $\mathbf{b}$ respectivament (senyalem que denotem els vectors per una lletra minúscula en negreta). L'expressió $x_1\mathbf{a_1}$ es denomina *producte de l'escalar* x_1 *i el vector* $\mathbf{a_1}$, i es defineix com

$$x_1\mathbf{a_1} = \mathbf{x_1} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_{11} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} \end{pmatrix}$$

Amb la notació que tenim podem espressar el sistema d'equacions original (1) com

$$x_1\mathbf{a_1} + \mathbf{x_2}\mathbf{a_2} + \cdots + \mathbf{x_n}\mathbf{a_n} = \mathbf{b} \tag{3}$$

Donada la equivalència entre (1) i (3), veiem que *el sistema (1) és consistent (te una solució) si i només si* $\mathbf{b}$ *es pot expressar com una combinació lineal de* $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$.

Podem considerar una notació encara més compacta pel sistema (1). En l'expressió (3) encara hi ha masses signes $+$. Considerem la següent notació:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ddots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

El conjunt ordenat de a_{ij} de l'esquerra es denomina una **matriu** formada per m **files** i n **columnes**, o una matriu m per n. Normalment les matrius es denoten per lletres majúsculas en negreta, e.g. $\mathbf{A}$. Una matriu que tingui només una fila es denomina un vector fila (que denotem per una lletra minúscula en negreta) i una matriu que tingui només una columna es denomina un vector columna.

2 Operacions amb Vectors.

2.1 Suma de vectors i multiplicació de vectors per escalars.

Hi ha varies regles per la suma de vectors i per la multiplicació de vectors per escalars. Les més importants són les següents:

Denotem per $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ vectors arbitraris n-dimensionals, i denotem per α i β números arbitraris. Aleshores,

Regles per la suma de vectors

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b})+\mathbf{c} \tag{5}$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \tag{6}$$

$$\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a} \tag{7}$$

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0} \tag{8}$$

L'equació (5) representa la propietat associativa de la suma de vectors, L'equació (6) representa la propietat commutativa de la suma de vectors, L'equació (7) ens diu que el vector n-dimensional de zeros és l'element neutre de la suma de vectors. Finalment, L'equació (8) ens diu que la suma de vectors també te element simètric definit per aquell vectir que sumat al vector original dona com resultat l'element neutre.

Regles per la multiplicació de vectors per escalars

$$(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a} \tag{9}$$

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b} \tag{10}$$

$$\alpha(\beta\mathbf{a})=(\alpha\beta)\mathbf{a} \tag{11}$$

$$\mathbf{1}\mathbf{a}=\mathbf{a} \tag{12}$$

Per resumir aquestes propietats, podem dir que la manipulació de vectors segueix,

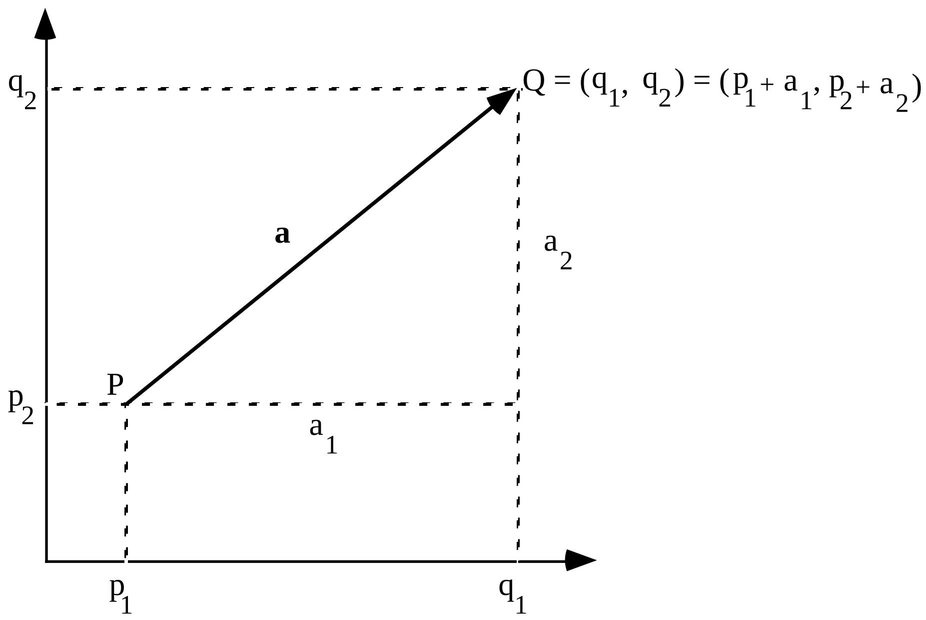

Figure 1: Interpretación geométrica d'un vector.

bàsicament les mateixes regles que la manipulació dels números reals, sense que ens tinguem de preocupar de cada component per separat.

2.2 Interpretació Geomètrica dels Vectors.

El mot "vector", provinent del llatí, està relacionat amb l'acte e moure una persona o un objecte d'un puesto a un altre. En el pla xy, un desplaçament es pot descriure per la distancia a_1 recorreguda en la direcció x i per la distancia a_2 recorreguda en la direcció y. En conseqüència, un moviment en el pla està unívocament determinat per un parell ordenat, o un vector de dos components (a_1, a_2). Geomètricament, tal moviment es pot representar per una flecha que surt del punt inicial P i arriva al punt final Q. El vector de P a Q es denota per $\overrightarrow{PQ}$ i l'anomenem **vector geomètric** or*segment lineal dirigit*.

Suposem que el vector geomètric **a** descriu un moviment desd'el punt $P = (p_1, p_2)$ fins el punt $Q = (q_1, q_2)$. Aleshores el parell (a_1, a_2) que descriu el moviments en les dues direccions x i y ve donat per $a_1 = q_1 - p_1$, $a_2 = q_2 - p_2$, o per $(a_1, a_2) = (q_1, q_2) - (p_1, p_2)$. Això s'ilustra a la figura 1

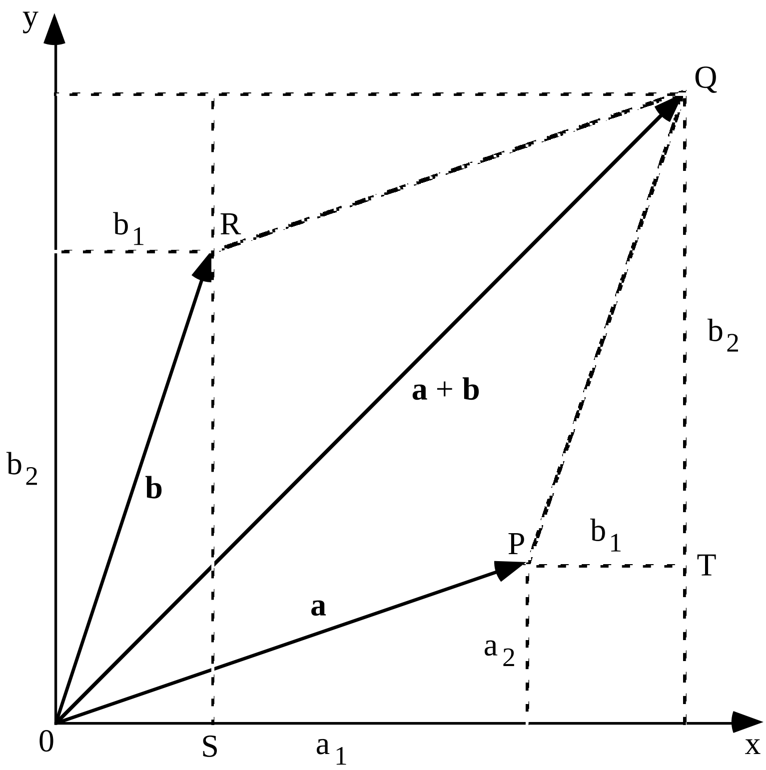

Figure 2: Suma de vectors.

Per altra banda, si ens donen el parell (a_1, a_2), obtenim el corresponent moviment, desplaçant-nos a_1 unitats en la direcció del eix x i a_2 unitats en la direcció del eix y. Si el punt inicial és $P = (p_1, p_2)$, aleshores arivarem al punt Q amb coordenades $(q_1, q_2) = (p_1 + a_1, p_2 + a_2)$.

La correspondència entre punt inicial, punt final i distància de desplaçament, fa que sigui una questió de comoditat pensar en un vector con un parell ordenat de números (a_1, a_2), o com un segment lineal dirigit $\overrightarrow{PQ}$.

Si representem els vectors per segments lineals dirigits, podem donar una interessant interpretació geomètrica a les operacions $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, i $t\mathbf{a}$. Sigui $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2})$ i $\mathbf{b} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2})$ ambdós amb punt inicial en l'origen de coordenades $(0, 0)$.

- La suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ que es mostra a la figura 2, és la diagonal del paralelogram determinat per els dos cantons $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

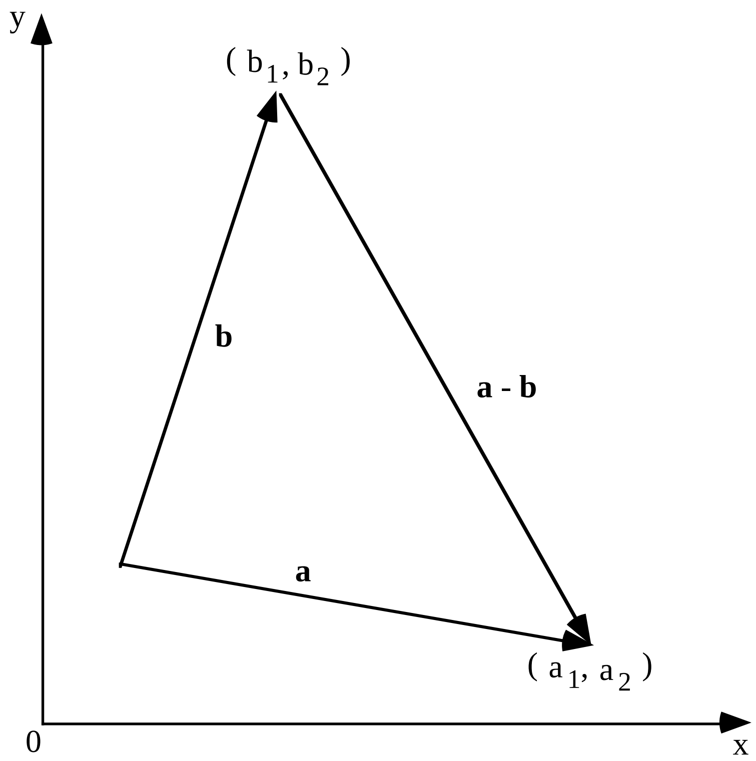

Figure 3: Diferència de vectors.

La raó geomètrica per això és que els triàngles $0RS$ i PQT són semblants. Es a dir, OR és paralel a PQ i $0P$ és paralel a RQ. Una interpretació 'aquesta figura és que si $\mathbf{a}$ ens desplaça des de 0 fins a P i $\mathbf{b}$ ens desplaça des de P fins a Q, aleshores el moviment combinat $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ens desplaça des de 0 fins a Q.

- La diferéncia $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ es representa a la figura 3. Posem especial atenció a la direcció del vector $\mathbf{a}-\mathbf{b}$. Senyalem també que $\mathbf{b}+(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}$.

- La interpretació geomètrica de $t\mathbf{a}$, on t és qualsevol número real, també és inmediata. Si $t>0$,aleshores el vector $t\mathbf{a}$ te la mateixa direcció que $\mathbf{a}$ i la seva allargada és t vegades l'allargada de $\mathbf{a}$. Si $t<0$,aleshores el vector $t\mathbf{a}$ te la direcció oposada a $\mathbf{a}$ i la seva allargada és $|t|$ vegades l'allargada de $\mathbf{a}$. Veiem doncs que la multiplicació per t equival a re-escalar el vector $\mathbf{a}$ raó per la qual el número t sovint s'anomena **escalar**.

El mateix tipus de raonament s'extèn a espais n-dimensionals ($n3$).

2.3 El Producte Escalar.

El producte escalar de dos vectors arbitraris n-dimensionals $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n})$ i $\mathbf{b} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b_n})$ es defineix com

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a_1 b_1} + \mathbf{a_2 b_2} + \cdots + \mathbf{a_n b_n} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i b_i} \tag{13}$$

Notem dos aspectes importants. (i) el resultat del producte escalar de dos vectors és un *número real* (o un escalar), no un vector; (ii) el producte escalar de dos vectors *només està definit* en el cas que ambdós vectors tinguin la mateixa dimensió.

Denotem per $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ vectors arbitraris n-dimensionals, i denotem per α un escalar. Aleshores,

Regles pel Producte Escalar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \tag{14}$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \tag{15}$$

$$(\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{16}$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > \mathbf{0} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \tag{17}$$

Regles (14) i (16) són trivials. Per demostrar la regla (15), considerem els vectors $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n})$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \dots, \mathbf{b_n})$ i $\mathbf{c} = (\mathbf{c_1}, \mathbf{c_2}, \dots, \mathbf{c_n})$. Aleshores,

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1 + c_1, \dots b_n + c_n) \\
&= a_1(b_1 + c_1) + \dots a_n(b_n + c_n) \\
&= a_1 b_1 + \dots a_n b_n + a_1 c_1 + \dots a_n c_n \\
&= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}
\end{aligned}$$

Per demostrar la regla (17) és suficient notar que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a_1^2} + \mathbf{a_2^2} + \cdots + \mathbf{a_n^2}$. Aquesta suma és sempre no negativa, i és zero si i només si totes les a's són zero.

2.3.1 Longitud dels Vectors i la Desigualtat de Cauchy-Schwarz.

Sigui $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n})$. Definim la **longitud** (o **norma**) del vector $\mathbf{a}$ que denotem per $\parallel \mathbf{a} \parallel$, com

$$\parallel \mathbf{a} \parallel = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a_1^2} + \mathbf{a_2^n} + \cdots + \mathbf{a_n^2}} \tag{18}$$

Utilitzant l'equació (18), definim la **distància** (Euclídea) entre dos vectors $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n})$, $\mathbf{b} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_n})$ com

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{\mathbf{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}} \tag{19}$$

Per $n = 2$ aquesta definició es redueix al concepte tradicional de distància. Considerem dos punts arbitraris (x_1, y_1) i (x_2, y_2). La distància entre aquests dos punts és la hipotenusa del triàngle que te per catets $(x_2 - x_1)$ i $(y_2 - y_1)$. Pel teorema de Pitàgoras, la longitud de la hipotenusa és $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Per $n = 3$ observem la figura 5 on volem calcular la distància entre els punts P i Q amb coordenades (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) respectivament. Aquests punts es troven en els vèrtex diagonalment oposats d'un cub rectangular que te cantons de longitud $a = |a_1 - b_1|$, $b = |a_2 - b_2|$, i $c = |a_3 - b_3|$.

Podem computar la diagonal PQ a partir del Teorema de Pitàgoras que ens diu $(PQ)^2 = (PR)^2 + (RQ)^2$. A la seva vegada, PR és la hipotenusa del triàngle amb cantons a i b, de manera que la seva longitud és $(PR)^2 = a^2 + b^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2$. A més, $RQ = c$, de manera que $(RQ)^2 = c^2 = (a_3 - b_3)^2$. En consequència, $(PQ)^2 = (PR)^2 + (RQ)^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$ i la distància entre (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3) és doncs

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

La desigualtat de Cauchy-Schwarz ens diu

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \tag{20}$$

2.3.2 Ortogonalitat

Considerem la figura 6 que ens mostra tres vectors $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ a $\mathcal{R}^2$. D'acord amb el teorema de Pitàgoras, l'angle θ entre els dos vectors $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és un angle recta

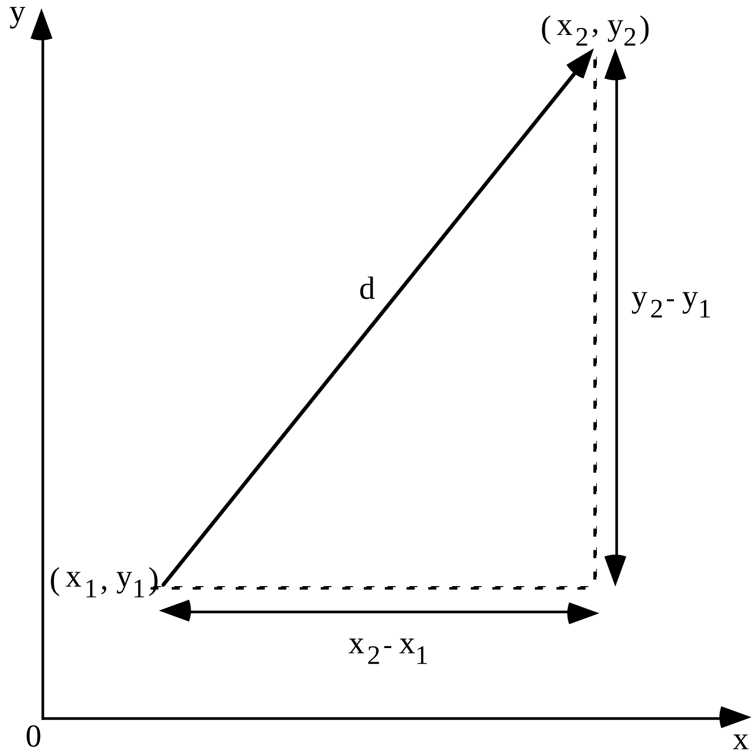

Figure 4: Distància entre dos vectors en $\mathbb{R}^2$.

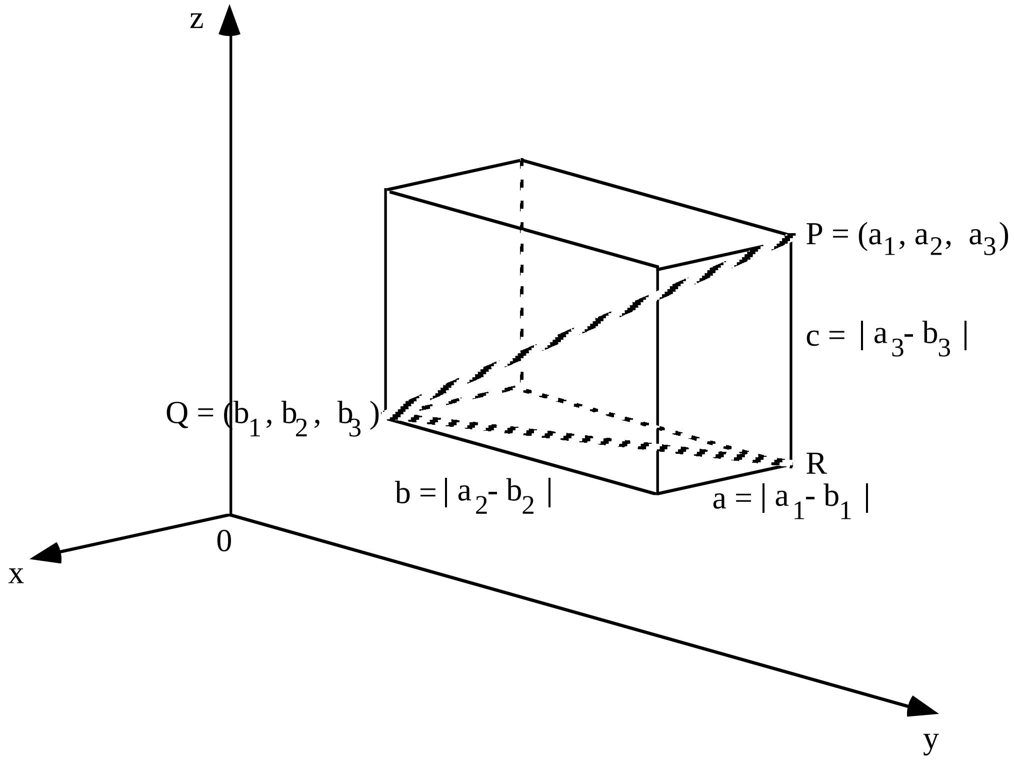

Figure 5: Distància entre dos vectors en $\mathbb{R}^3$.

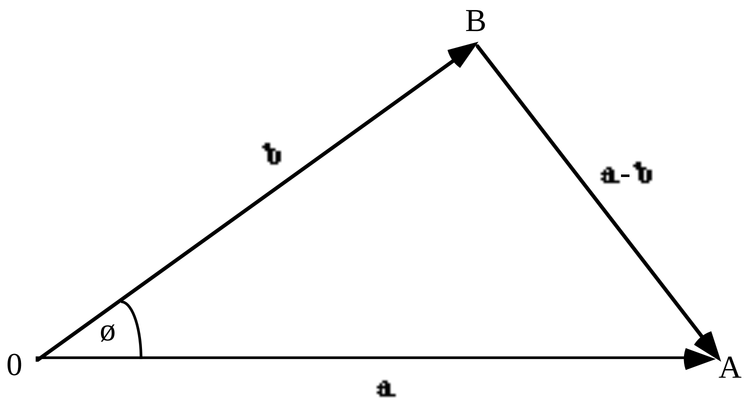

Figure 6: Ortogonalitat.

si i només si $(0A)^2 + (0B)^2 = (AB)^2$ o en una notació diferent, $\|\mathbf{a}\|^{\mathbf{2}} + \|\mathbf{b}\|^{\mathbf{2}} = \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^{\mathbf{2}}$.

Això implica que $\theta = 90°$ si i només si

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \end{aligned}$$

que es redueix a

$$0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{2a} \cdot \mathbf{b} \implies \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

demostrem doncs que l'angle format per dos vectors és recta, si i només si el seu proucte escalar és zero. Es diu aleshores que els vectors són **ortogonals** i ho denotem $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. Aquesta demostració es generalitza inmediatament a vectors n-dimensionals, i podem escriure

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Longleftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

3 Línies i Plans.

3.1 Línies.

Siguin $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})$ i $\mathbf{b} = (\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3})$ dos vectors definits a $\mathcal{R}^3$. Pensem en ells com dos fletches que surten de l'origen de coordenades i arriven als punts que tenen com coordenades (a_1, a_2, a_3) i (b_1, b_2, b_3). Podem dibuixar una recta L que

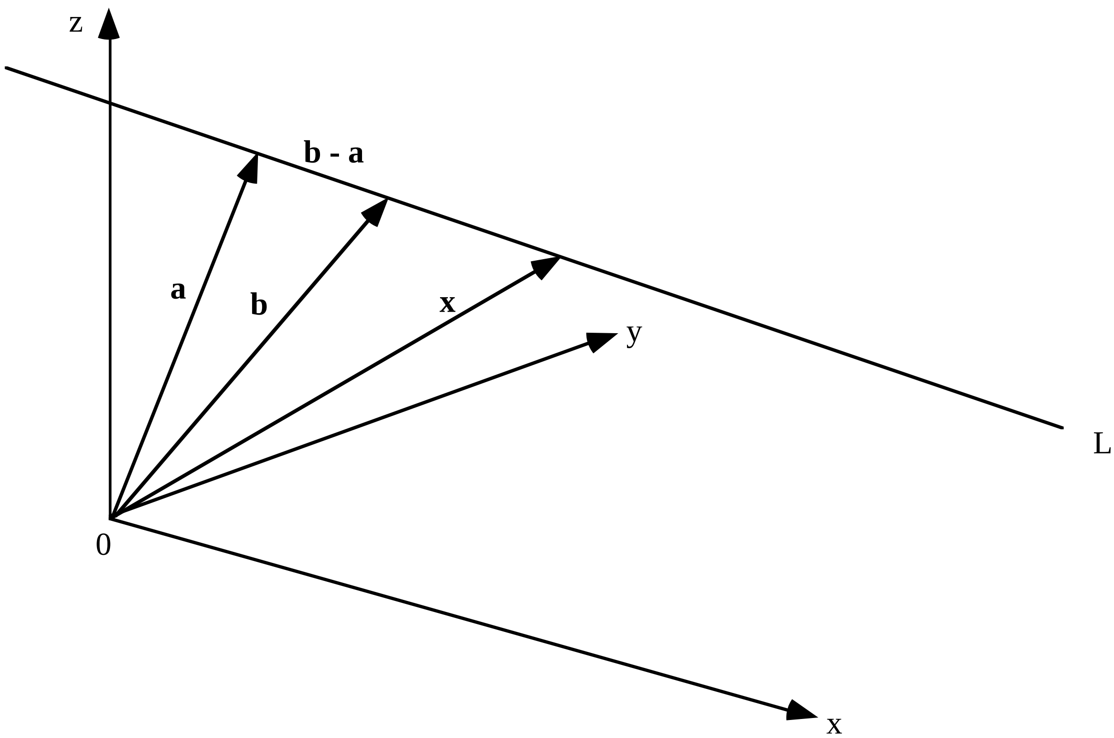

Figure 7: Una línia en $\mathbb{R}^2$.

passi per aquests dos punts (veure figura 7). L'equació d'aquesta recta la podem escriure com $\mathbf{x} = (\mathbf{1} - \mathbf{t})\mathbf{a} + \mathbf{t}\mathbf{b}$, on t és un número real.

Formalment doncs, la línia L que passa per dos punts $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \ldots, \mathbf{a_n})$ i $\mathbf{b} = (\mathbf{b_1}, \ldots, \mathbf{b_n})$ és el conjunt $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_n})$ que satisfà

$$\mathbf{x} = (\mathbf{1} - \mathbf{t})\mathbf{a} + \mathbf{t}\mathbf{b}, \tag{21}$$

per algún número real t.

3.2 Hiperplans.

Considerem un pla $\mathcal{P}$ a $\mathcal{R}^3$ que passa per un punt $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})$. Suposem també que el vector $\mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \mathbf{p_3}) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ és ortogonal al pla $\mathcal{P}$ (veure figura 8). Dir que $\mathbf{p}$ és ortogonal a $\mathcal{P}$ vol dir que $\mathbf{p}$ és ortogonal a qualsevol línia del pla. Així, si $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{x_3})$ és un altra punt arbitrari en el pla $\mathcal{P}$, aleshores $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ és ortogonal a $\mathbf{p}$. En conseqüència, el producte escalar de $\mathbf{p}$ i $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ ha de

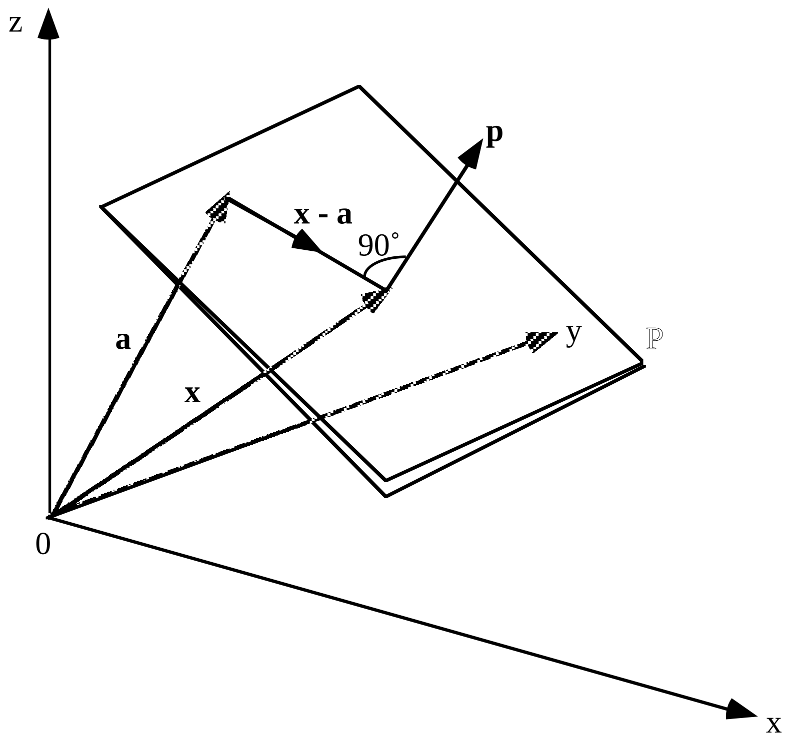

Figure 8: Ortogonalitat i hiperplans.

ser 0, és a dir

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{22}$$

Així doncs, (22) és l'equació general d'un pla a $\mathcal{R}^3$ que passi per $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3})$.

En termes generals, diem que un hiperpla que passi per un punt $\mathbf{a} = (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n})$ que sigui ortogonal a un vector $\mathbf{p} = (\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}, \ldots, \mathbf{p_n}) \neq \mathbf{0}$ és el conjunt dels punts $\mathbf{x} = (\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n})$ que satisfà

$$\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{23}$$

Notem que si el vector ortogonal $\mathbf{p}$ el substituim per $s\mathbf{p}$, on $s \neq 0$ aleshores precisament el mateix conjunt de vectors $\mathbf{x}$ satisfarà l'equació de l'hiperpla.

4 Matrius i Operacions amb matrius.

Una **matriu** és un conjunt de números distribuïts de forma rectangular considerats com una entitat. Aquests números normalment estan delimitats per parèntesis. L'**ordre** d'una matriu està donat pel número de les seves **files** i **columnes**. Diem que tenim una matriu $m \times n$ quan aquesta està composada per m files i n columnes. Els números que composen la matriu es denominen **elements** de la matriu. En particular, a_{ij} denota l'element situat en la fila i i en la columna j. En general, una matriu $m \times n$ te la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{24}$$

Casos particulars de matrius són els següents:

- matriu $1 \times n$, és un vector fila,
- matriu $m \times 1$, és un vector columna,
- matriu $n \times n$, (i.e. $m = n$) tenim una **matriu cuadrada**. Els elements $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ constitueixen la **diagonal principal** de la matriu.

4.1 Operacions amb matrius

La motivació per utilitzar les matrius és l'existència de regles molt útils per la seva manipulació. Aquestes regles es corresponen fins a cert punt amb les regles familiars de l'àlgebra ordinaria.

Per començar diem que dues matrius $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ són **iguals**, i ho escribim $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ si $a_{ij} = b_{ij} \, \forall i, j \;\; i = 1, 2, \dots, m$ i$j = 1, 2, \dots, n$. Si dues matrius $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ no són **iguals**, ho escribim $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

4.1.1 Suma i Multiplicació per un Escalar.

Siguin $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m \times n}}$ i $\mathbf{B} = (\mathbf{b_{ij}})_{\mathbf{m \times n}}$ dues matrius $m \times n$. Definim la **suma** de $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ com la matriu $m \times n$, $(a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$. Es a dir,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m \times n}} + (\mathbf{b_{ij}})_{\mathbf{m \times n}} = (\mathbf{a_{ij}} + \mathbf{b_{ij}})_{\mathbf{m \times n}} \tag{25}$$

En paraules, la suma de dues matrius del mateix ordre consisteix en la suma dels seus corresponents elements.

Sigui α un número real. Definim $\alpha\mathbf{A}$ com

$$\alpha\mathbf{A} = \alpha(\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m\times n}} = (\alpha\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m\times n}} \tag{26}$$

Així doncs, la multiplicació d'una matriu per un escalar consisteix en multiplicar cada element de la matriu per aquell escalar.

Regles per la suma de matrius

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B})+\mathbf{C} \tag{27}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A} \tag{28}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0} = \mathbf{A} \tag{29}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = \mathbf{0} \tag{30}$$

Regles per la multiplicació de matrius per escalars

$$(\alpha+\beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A} \tag{31}$$

$$\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B} \tag{32}$$

4.1.2 Multiplicació de matrius.

Les operacions introduïdes fins ara semblen força naturals. Hi ha varies maneres de definir la multiplicació de matrius.

Una definició que NO utilitzarem pero que sembla bastant natural es refereix al producte de dues matrius del mateix ordre. Siguin $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m\times n}}$ i $\mathbf{B} = (\mathbf{b_{ij}})_{\mathbf{m\times n}}$ dues matrius $m \times n$. Definim el producte de $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ com la matriu $\mathbf{C} = (\mathbf{c_{ij}})_{\mathbf{m\times n}}$ on $\mathbf{c_{ij}} = \mathbf{a_{ij}}\mathbf{b_{ij}}$. Es a dir, el producte de dues matrius del mateix ordre consisteix en el producte dels seus corresponents elements. Aquesta és una operació legítima que s'anomena *Producte de Hadamard* de $\mathbf{A}$i$\mathbf{B}$. Aquest definició de producte de dues matrius no es gaire utilitzat.

La definició més utilitzada de multiplicació de matrius, encara que més complexe, resulta més útil en algunes manipulacions crucials de les equacions lineals:

Considerem les matrius $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m\times n}}$ i $\mathbf{B} = (\mathbf{b_{ij}})_{\mathbf{n\times p}}$. Definim el producte de $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, com la matriu$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ on $\mathbf{C} = (\mathbf{c_{ij}})_{\mathbf{m\times p}}$. L'element de la fila i i la columna j és el producte escalar

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{33}$$

de la fila i de la matriu $\mathbf{A}$ i de la columna j de la matriu $\mathbf{B}$.

Hem de remarcafr que el producte $\mathbf{AB}$ només està definit si el número de columnes de la matriu $\mathbf{A}$ coincideix amb el número de files de la matriu $\mathbf{B}$. Una implicació inmediata és que si $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ són dues matrius, el producte $\mathbf{AB}$ pot estar definit encara que producte $\mathbf{BA}$ no ho estigui.

També val la pena notar que inclús en el cas en que tant $\mathbf{AB}$ com $\mathbf{BA}$ estiguin definits, el resultat d'aquests dos productes no necessàriament coincideix. Quan escribim $\mathbf{AB}$ diem que **premultipliquem** B per $\mathbf{A}$, mentre que quan escribim $\mathbf{BA}$ diem que **postmultipliquem** B per $\mathbf{A}$.

Regles per la multiplicació de matrius Considerem tres matrius $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m\times n}}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{b_{ij}})_{\mathbf{n\times p}}$i $\mathbf{C} = (\mathbf{c_{ij}})_{\mathbf{p\times q}}$. aleshores podem definir les operacions següents:

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \tag{34}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{AB}) + \mathbf{AC} \tag{35}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \tag{36}$$

L'equació (34) representa la propietat associativa de la multiplicació de matrius. L'equació (35) representa la propietat distributiva per l'esquerra. Finalment, l'equació (36) representa la propietat distributiva per la dreta. Senyalem que necessitem definir la propietat distributiva per la dreta i l'esquerra ontat que la multiplcació de matrius no és commutativa.

Un cas particular de multiplicació de matrius en el cas de matr4ius quadrades són les **potencies d'una matriu**. Si $\mathbf{A}$ és una matriu quadrada,

$$\mathbf{A^n} = \mathbf{AAAAA}\ldots\mathbf{A} \tag{37}$$

Una matriu quadrada d'especial interès és la **matriu identitat** d'ordre n que denotem per $\mathbf{I_n}$ (o solament **I**). Aquesta és una matriu $n \times n$ composada per uns al llarg de la diagonal principal i zeros a la resta de posicions:

$$\mathbf{I_n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{38}$$

Si $\mathbf{A}$ és una matriu qualsevol $m \times n$, és fàcil comprovar que $\mathbf{AI_n} = \mathbf{A}$. De forma semblant, Si $\mathbf{B}$ és una matriu qualsevol $n \times m$, és fàcil comprovar que $\mathbf{I_n B} = \mathbf{B}$.

4.1.3 Transposada d'una matriu.

Suposem que volem intercanviar files i columnes en una matriu $\mathbf{A},\ \mathbf{m} \times \mathbf{n}$, de manera que la primera fila esdevè la primera columna, etc. Aquesta nova matriu $n \times m$ s'anomena **matriu tranposada** de la matriu original i la denotem per $\mathbf{A'}$ o tambe$\mathbf{A^T}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{A'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{39}$$

Regles per la transposició de matrius Considerem dues matrius $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m} \times \mathbf{n}},$ i $\mathbf{B} = (\mathbf{b_{ij}})_{\mathbf{n} \times \mathbf{p}}$. aleshores podem definir les operacions següents:

$$(\mathbf{A'})' = \mathbf{A} \tag{40}$$

$$(\mathbf{A}) + \mathbf{B} = \mathbf{A'} + \mathbf{B'} \tag{41}$$

$$(\alpha \mathbf{A})' = \alpha \mathbf{A'} \tag{42}$$

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B'A'} \tag{43}$$

Un cas particular especialment interessant són les **matrius simètriques**. Una matriu simètrica és aquella matriu quadrada que eés simètrica en respecte a la diagonal principal. Es a dir, una matriu $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{m} \times \mathbf{n}}$ és simètrica si i només si $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j$. En altres paraules, les matrius simètriques estàn caracteritzades pel fet de que són iguales a les seves transposades:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A'} \iff \mathbf{A}\text{és simètrica} \tag{44}$$

5 Determinants i Inversió de Matrius.