Capítol 2

Jocs estàtics amb Informació Perfecta

2.1 Introducció

Podem classificar les diferents situacions de joc d'acord amb criteris diferents. Un dels més importants considera el comportament dels agents. D'acord amb aquest criteri trobem els *jocs cooperatius* i els *jocs no cooperatius*. En aquests darrers els agents maximitzen una funció objectiu restringida per les expectatives que es formen sobre el comportament dels rivals, i per tant sense capacitat per poder comunicar-se entre ells. En canvi, en els primers els agents poden formar coalicions, (és a dir, es poden comunicar entre ells) per tal d'assolir els seus objectius.

Un altre criteri de classificació dels jocs es refereix a l'ortogonalitat dels objectius dels consumidors. Quan aquests són diametralment oposats, els guanys d'un jugadors representen les pèrdues d'un altre jugador. Aleshores, parlem de *jocs de suma zero*. En altre cas parlen de jocs de suma no zero.

Una col.lecció d'exemples que permeten veure la teoria de jocs en acció en situacions quotidianes es troba a Dixit i Nalebuff (1991); l'utilització de la teoria de jocs pels economistes està expressada de forma atractiva a Kreps (1990b). Una introducció més complerta a la teoria de jocs es troba en el capítol 1 de Binmore (1990). Textos introductoris molt amens són Gibbons (1992) i Scott Bierman i Fernandez (1998); un text molt interessant és Binmore (1992).

En aquest capítol estudiarem jocs de dos jugadors amb informació perfecta i completa, en els que no hi ha decisions aleatòries. a més, bona part dels jocs que estudiarem seran de suma zero.

El joc de "tres en ratlla"és un exemple senzill d'el tipus de jocs que volem analitzar. Els escacs és un exemple molt més complex. Aquests són jocs d'informació completa i perfecta. El Parchis es un joc estrictament competitiu amb decisions aleatòries. El que pot fer un jugador està determinat per la tirada d'un dau. El poker en canvi, és un joc d'informació imperfecta. Quan un jugador ha de fer una aposta, li agradaria conèixer les cartes d'els altres jugadors, però no te accés a aquesta informació.

El joc de tres en ratlla es força ben conegut. Dos jugadors tenen tres fitxes cadascun. En un tauler quadrat de nou caselles han d'anar situant les fitxes per torns. El jugador que aconsegueix situar-les en línia recta guanya el joc. La figura 2.1 (veure Binmore, 1992) presenta una part de l'arbre que correspon a aquest joc.

El joc de Nim consisteix en distribuir un conjunt de, per exemple, monedes en grups sobre una taula. Dos jugadors han de decidir, per torns, retirar un cert número de monedes d'un dels grups. El joc acaba quan un jugador retira la darrera moneda. Aquest jugador és el perdedor del joc. Alternativament, el guanyador és el jugador que després de retirar les monedes deixa sobre la taula una sola moneda. La figura 2.2 (veure Binmore, 1992) il.lustra aquest joc pel cas de quatre monedes repartides en tres grups, un amb dos monedes i dos més amb una moneda cadascun. Una característica que fa aquest joc diferent del joc de tres en ratlla és que sempre hi ha un jugador que guanya el joc. No pot haver-hi un empat. Un joc semblant a aquest és aquell on es deixa caure sobre una taula un manat de bastonets. El jugadors per torns han d'anar retirant els bastonets un a un sense que al retirar un bastonet es provoqui el moviment de cap altra bastonet. Si això passa, el següent jugador entra en acció. El guanyador en aquest cas és el jugador que aconsegueix retirar el darrer bastonet.

2.2 Cóm jugar el joc

De moment només parlarem del que s'anomenen estratègies *pures*. Una estratègia pura pel jugador i en el tipus de jocs que hem vist fins ara, és un pla que especifica una acció (determinística, no aleatòria) per *cada* un del nusos de decisió en el que el jugador i tindria que prendre una decisió si el desenvolupament el joc portés a tal nus. Si tots els jugadors en un joc seleccionen una estratègia pura i es mantenen en ella, aquest conjunt d'estratègies caracteritzen un joc sense decisions aleatòries.

Considerem el Joc G de la figura 2.3. Els nusos on el jugador I ha de prendre una decisió són α i β. Una estratègia pura pel jugador I ha d'especificar doncs una acció en el nus α i una acció en el nus β. Donat que hi ha dues accions possibles en cada un d'aquests nusos, el jugador I te un conjunt d'estratègies amb un total de $2 \times 2 = 4$ elements:

$$S_1 = \{ee,\ ed,\ de,\ dd\}.$$

L'estratègia pura ed vol dir que el jugador I pren l'acció e si es troba en el nus α i pren l'acció d si es troba en el nus β (notem que si el jugador I utilitza

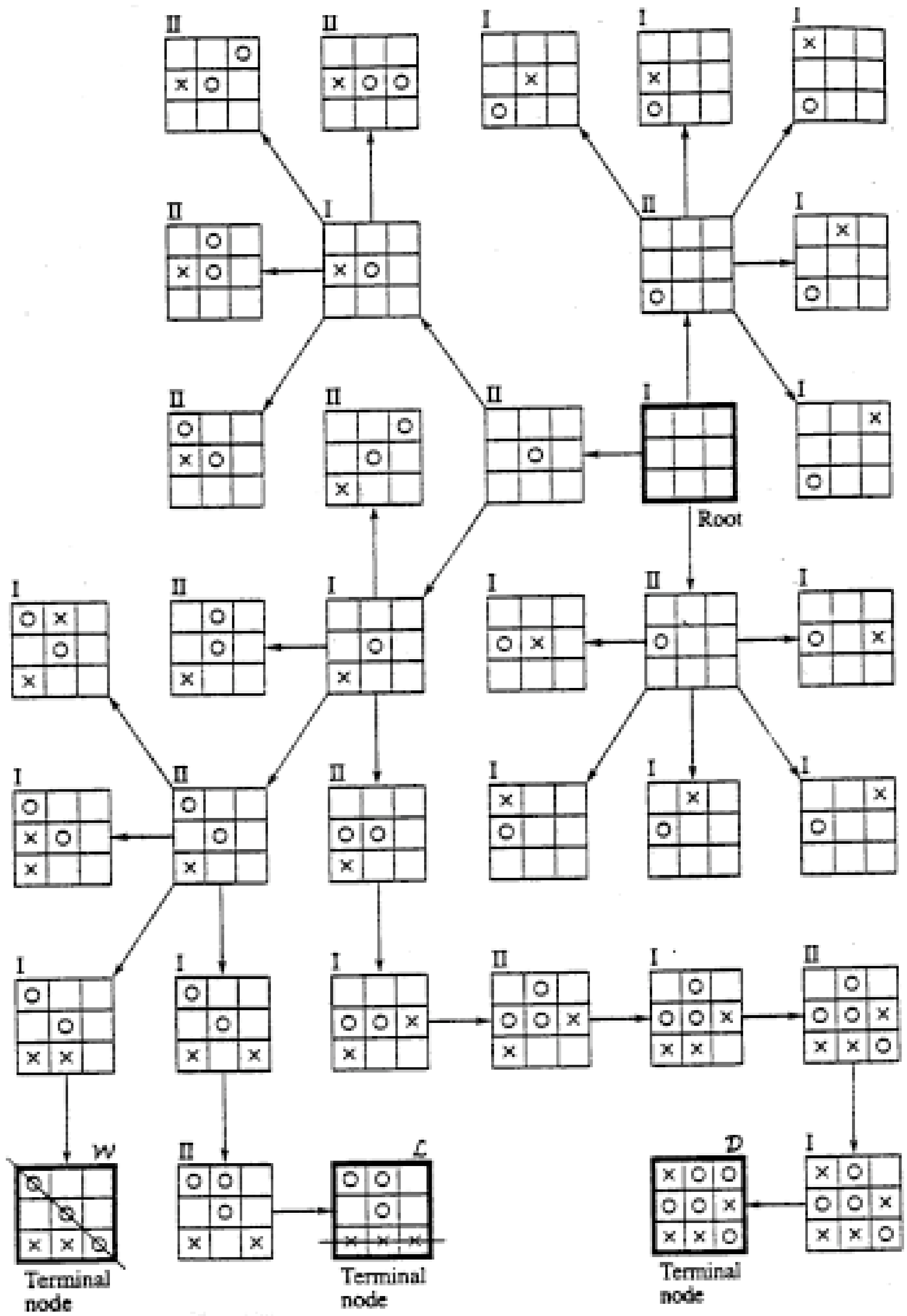

Figura 2.1: El joc de tres en ratlla.

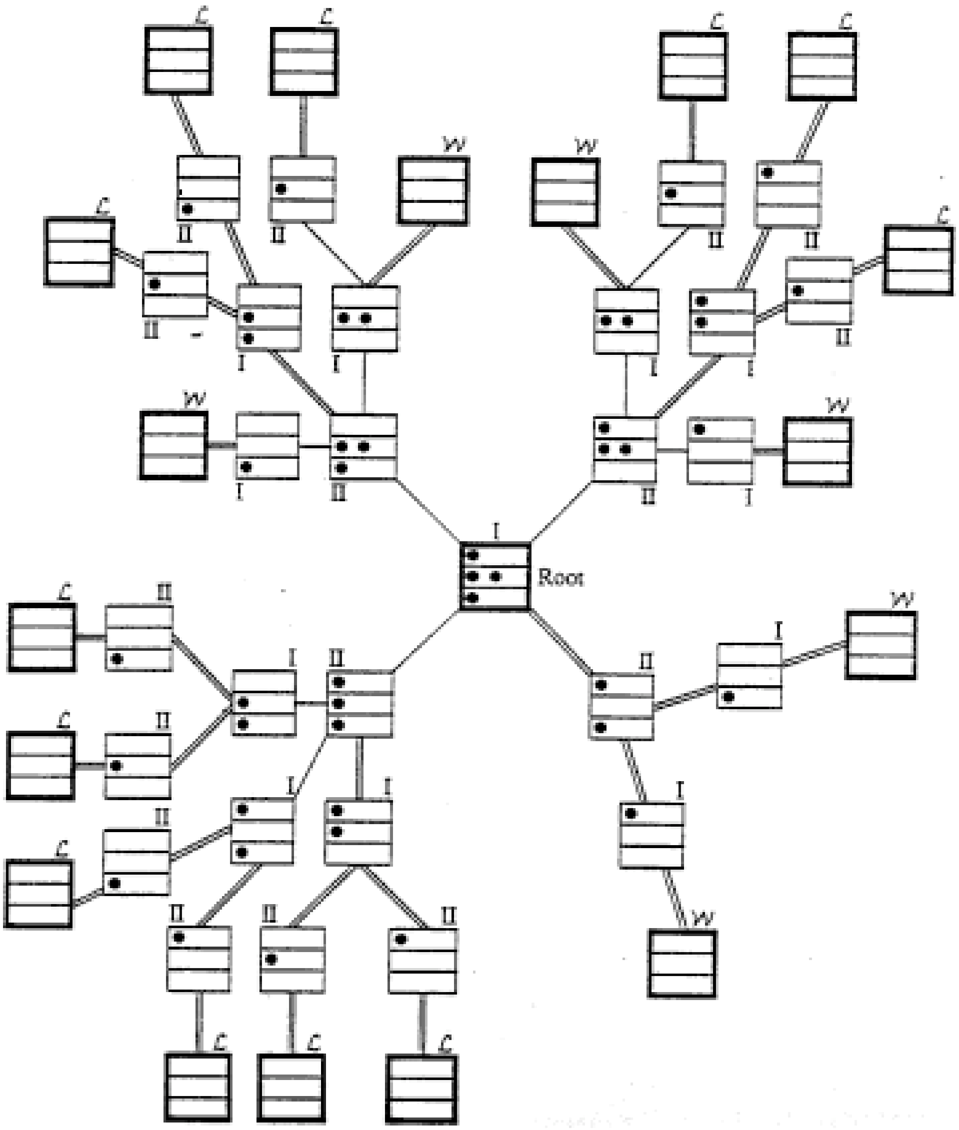

Figura 2.2: El joc de Nim.

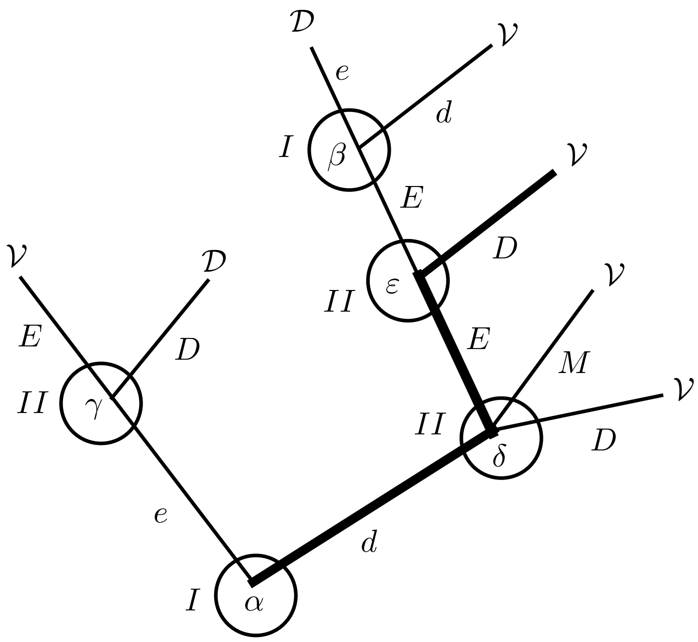

Figura 2.3: L'arbre del joc G.

l'estratègia ed mai es trobarà en el nus β independentment de quines siguin les accions del jugador II. Ara be, la definició formal d'una estratègia requereix l'especificació d'una acció en el nus β encara que aquesta acció mai tindrà cap efecte sobre el desenvolupament del joc.)

Els nusos on el jugador II ha de prendre una decisió són γ, δ i ε. Una estratègia pura pel jugador II ha d'especificar una acció pel jugador II en el nus γ, una acció en el nus δ i una acció en el nus ε. Donat que hi ha dues accions possibles en els nusos γ i ε i tres accions possibles en el nus δ, el jugador II te un conjunt d'estratègies amb $2 \times 3 \times 2 = 12$ elements:

$$S_2 = \{EEE, EED, EME, EMD, EDE, EDD, DEE, DED,\\ DME, DMD, DDE, DDD\}.$$

L'estratègia pura EMD ens diu que si el jugador II es troba en el nus γ utilitzarà l'acció E, decidirà l'acció M si es troba en el nus δ i prendrà l'acció D si es troba en el nus ε.

Finalment, suposarem que els resultats possibles d'aquest joc per cada jugador són *guanyar* ($\mathcal{V}$) o *perdre* ($\mathcal{D}$). En aquests cas doncs si un jugador guanya, necessariament vol dir que l'altre perd. En conseqüència, els nusos terminals només cal que mostrin el resultat del joc per al jugador I.

Un desenvolupament del joc G com el descrit en la figura 2.3 comença a l'arrel α amb el jugador I escollint l'acció d. Això ens porta al nus δ en el que el

↓I/$\overrightarrow{II}$	EEE	EED	EME	EMD	EDE	EDD
ee	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
ed	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
de	$\mathcal{D}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
dd	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

↓I/$\overrightarrow{II}$	DEE	DED	DME	DMD	DDE	DDD
ee	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
ed	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}$
de	$\mathcal{D}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
dd	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Taula 2.1: El joc G en forma estratègica.

jugador II pren l'acció E que condueix el joc al nus ε on de nou el jugador II pren la decisió D. El joc es conduït a un nus terminal amb l'etiqueta $\mathcal{V}$ que ens indica que el jugador I és el guanyador. Aquest desenvolupament del joc el denotarem per la seqüència $[dED]$ d'accions que el genera.

Quines són les estratègies que resulten en el desenvolupament $[eED]$ del joc G? El parell d'estratègies escollides pels jugadors han de ser del tipus (dx, XED), on dx vol dir qualsevol estratègia que especifiqui que el jugador I pren l'acció d en el nus α. Hi ha dues d'aquestes, és a dir de i dd. De forma semblant, XED vol dir qualsevol estratègia que especifiqui que el jugador II pren l'acció E en el nus δ i l'acció D en el nus ε. Hi ha dues d'aquestes, és a dir EED i DED. En conseqüència, el número total de parells d'estratègies que resulten en el desenvolupament $[dED]$ és $2 \times 2 = 4$.

La Taula 2.1 mostra el joc G en *forma estratègica* (o forma normal).

La forma estratègica ens indica el resultat del joc per cada parell d'estratègies. Les files de la matriu denoten les estratègies pures del jugador I i les columnes representen les estratègies pures del jugador II. Per tant, la casella definida per la fila de i per la columna EED conté la lletra $\mathcal{V}$ que indica que el jugador I guanya el joc si ell utilitza l'estratègia de i el jugador II utilitza l'estratègia EED. Aquest fet el vam verificar en el paràgraf anterior a l'examinar el desenvolupament $[dED]$ que resulta d'utilitzar parells d'estratègies del tipus (dx, XED).

2.2.1 L'algoritme de Zermelo.

Per analitzar el joc d'escacs, Zermelo (1912) va utilitzar un mètode consistent en començar a examinar el joc des del final i fer marxa enrera fins arribar a l'inici

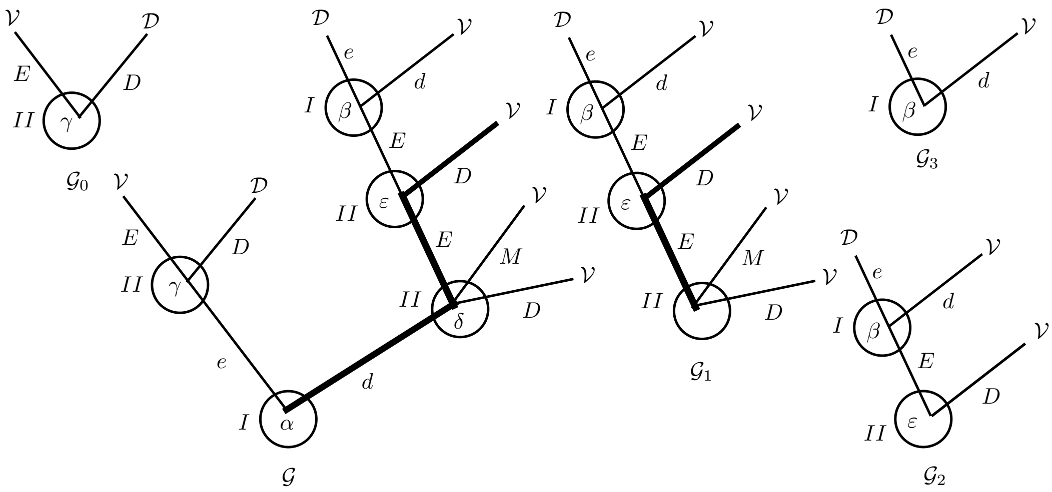

Figura 2.4: El joc G i els seus subjocs.

del joc. Aquesta tècnica s'anomena també "inducció cap enrera". Per il.lustrar el funcionament d'aquest mecanisme utilitzarem el joc G.

La figura 2.4 mostra tots el subjocs del joc G. Cada subjoc conté un nus x i l'arbre que segueix a x. Diem que el valor $v(H)$ d'un subjoc H de G és $\mathcal{V}$ si el jugador I te una estratègia per H que li fa guanyar el joc H independentment de quina sigui l'estratègia que utilitzi el jugador II. De la mateixa manera, diem que el valor $v(H)$ d'un subjoc H de G és $\mathcal{D}$ si el jugador II te una estratègia per H que li fa guanyar el joc H independentment de quina sigui l'estratègia que utilitzi el jugador I. A priori no hi ha cap raó per la que tals valors existeixin, encara que una característica dels jocs estrictament competitius (com els que estem examinant aquí) és que tots els subjocs tenen un valor.

Considerem en primer lloc els subjocs unipersonals $\mathcal{G}_0$ i $\mathcal{G}_3$ de la figura 2.4. El jugador II guanya $\mathcal{G}_0$ escollint l'acció D. Així doncs, $v(\mathcal{G}_0) = \mathcal{D}$[1]. També, el jugador I guanya $\mathcal{G}_3$ prenent l'acció d, i per tant $v(\mathcal{G}_3) = r$.

Mirem a continuació el joc $\mathcal{G}'$ de la figura 2.5. Aquest joc s'obté a partir de G substituint el subjoc $\mathcal{G}_0$ per un nus terminal amb el valor $\mathcal{D}$ de $\mathcal{G}_0$, i el subjoc $\mathcal{G}_3$ per un nus terminal amb el valor $\mathcal{V}$ de $\mathcal{G}_3$. Si el jugador I te una estratègia s' que sempre guanya en el joc $\mathcal{G}'$, aleshores també te una estratègia s que sempre guanya a G. Per què?

Sigui quina sigui l'estratègia utilitzada pel jugador II, l'us de l'estratègia s' en el joc $\mathcal{G}'$ donarà lloc a un desenvolupament del joc $\mathcal{G}'$ que condueix a un nus terminal x de $\mathcal{G}'$ etiquetat amb $\mathcal{V}$. Tal nus terminal x pot correspondre a un subjoc $\mathcal{G}_x$ de G. Si aquest és el cas, aleshores $v(\mathcal{G}_x) = \mathcal{V}$. En conseqüència, el jugador I

[1]Recordem que el resultat d'un joc el denotem per $\mathcal{D}$ quan és el jugador II qui el guanya

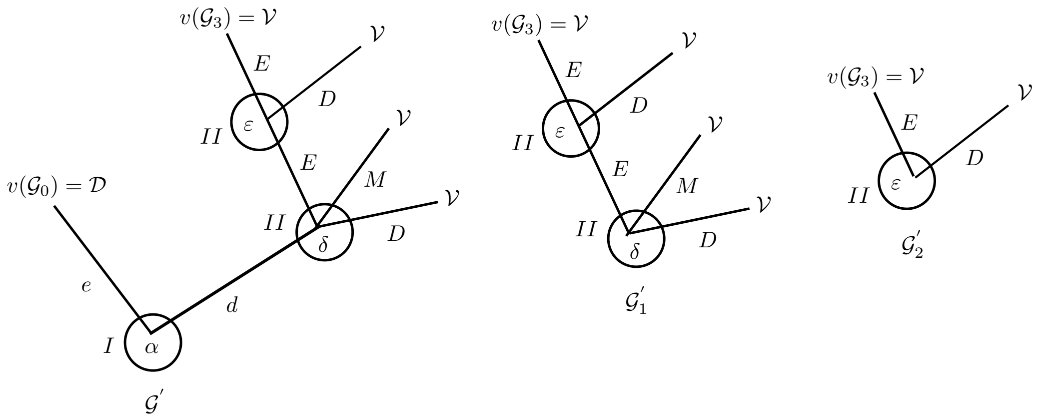

Figura 2.5: El joc $\mathcal{G}'$ i els seus subjocs.

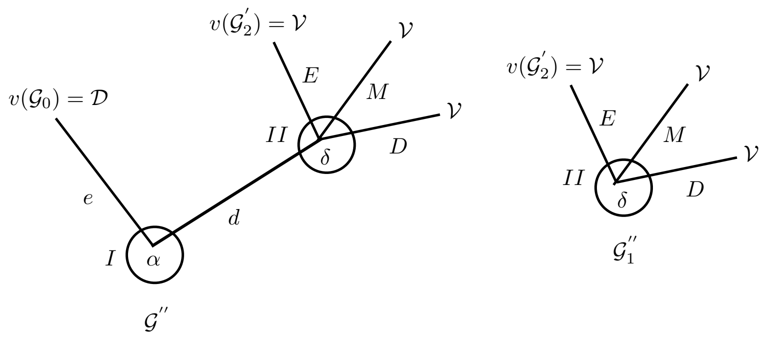

Figura 2.6: El joc $\mathcal{G}''$ i els seus subjocs.

te una estratègia guanyadora s_x en el joc G. Aquesta és jugar d'acord amb s' fins arribar a un dels subjocs $\mathcal{G}_x$ i aleshores jugar d'acord amb s_x.

Un argument semblant mostra que si el jugador II te una estratègia t' que sempre guanya en el joc $\mathcal{G}'$, aleshores te una estratègia t guanyadora en el joc G.

Com a conseqüència, si el joc $\mathcal{G}'$ te un valor, també el te el joc G i $v(\mathcal{G}') = v(G)$.

Considerem ara el joc $\mathcal{G}''$ de la figura 2.6. Aquest joc resulta de considerar el joc $\mathcal{G}'$ substituint el subjoc $\mathcal{G}_2'$ per un nus terminal amb l'etiqueta $\mathcal{V}$ de $\mathcal{G}_2'$. La raó per la que $v(\mathcal{G}_2') = \mathcal{V}$ és que el jugador II perd en el joc unipersonal $\mathcal{G}_2'$ independentment de quina sigui l'acció D o E que prengui. A partir de l'argument que hem desenvolupat abans, si el joc $\mathcal{G}''$ te un valor, també el te el joc $\mathcal{G}'$ i $v(\mathcal{G}'') = v(\mathcal{G}')$.

Finalment, considerem el joc $\mathcal{G}'''$ de la figura 2.7. Aquest joc resulta a partir del joc $\mathcal{G}''$ substituint el subjoc $\mathcal{G}_1''$ per un nus terminal amb l'etiqueta del valor de $\mathcal{G}_1''$. Com abans, si $\mathcal{G}]'''$ te un valor, també el te $\mathcal{G}''$ i $v(\mathcal{G}''') = v(\mathcal{G}'')$.

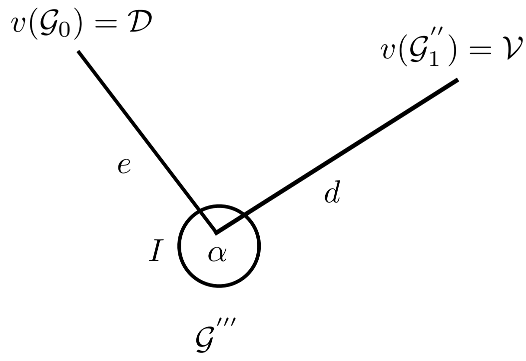

Figura 2.7: El joc $\mathcal{G}^{'''}$

Però $\mathcal{G}^{'''}$ es un joc unipersonal que el jugador I pot guanyar escollint d. Per tant, $\mathcal{G}^{'''}$ te un valor i $v(\mathcal{G}^{'''}) = \mathcal{V}$. En conseqüència G també te un valor, i $v(G) = v(\mathcal{G}^{'}) = v(\mathcal{G}^{''}) = v(\mathcal{G}^{'''}) = \mathcal{V}$. Concloem doncs, que el jugador I te una estratègia que li fa guanyar el joc G independentment de quina sigui l'estratègia del jugador II. Aquesta estratègia és dd.

Què és una estratègia guanyadora en el joc G?

Una manera de trobar una estratègia guanyadora pel jugador I en el joc G consisteix en examinar la forma estratègica del joc que es mostra en la Taula 2.1. Notem que la fila corresponent a l'estratègia pura dd només conté $\mathcal{V}$. Això vol dir que si el jugador utilitza l'estratègia dd guanyarà independentment de quina sigui l'acció del jugador II. Per tant, l'estratègia dd és una estratègia guanyadora (també anomenada estratègia dominant). Aquesta, però, pot no ser una forma raonable de buscar estratègies guanyadores quan la feina de construir la forma estratègica del joc es molt complexa.

Una manera alternativa de trobar una estratègia guanyadora és seguir el raonament que hem utilitzat per demostrar que existeix una estratègia guanyadora pel joc G. Comencem per examinar els subjocs més petits de G, és a dir aquells subjocs que no contenen cap altre subjoc en ells. Per cada subjoc senyalem les branques que corresponen a les decisions òptimes dins del subjoc. Imaginem ara que les branques que no estan senyalades no existeixen. Això dona lloc a un nou joc G^*. Repetim ara el procediment amb G^* i continuem d'aquesta manera fins que no resti res a fer. Al final d'aquest procediment hi haurà al menys un desenvolupament del joc G pel que totes les branques han estat assenyalades. Aquests són els únics desenvolupaments que poden ser seguits si és de coneixement comú entre els jugadors que cadascun d'ells mirarà de guanyar el joc en qualsevol circumstància.

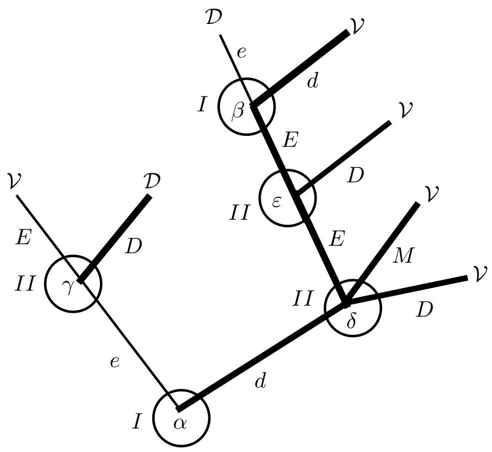

Figura 2.8: El joc G.

Aquest procediment s'il.lustra pel joc G en la Figura 2.8.

Només un desenvolupament del joc te totes les seves branques senyalades i porta a una victòria del jugador I, confirmant així que és el jugador I qui te una estratègia guanyadora. Una estratègia pura guanyadora es pot llegir directament de l'arbre escollint una de les branques senyalades a cada nus on li tocaria jugar al jugador I jugar si s'arribes a tal nus. En el cas del joc G, només la branca d està senyalada a cada un d'aquests nusos. Per tant el jugador I te una única estratègia pura guanyadora, i aquesta és dd.

2.3 El resultat del joc: els pagaments

A l'hora de parlar de pagaments resulta enormement útil poder identificar cada resultat d'un joc amb una *llista* de pagaments que especifiqui un pagament per cada jugador. Cada jugador el suposem racional en el sentit de Von Neumann i Morgenstern, és a dir, cada jugador i actua amb l'objectiu de maximitzar una funció d'utilitat $u_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida sobre el conjunt Ω de resultats finals del joc. El *pagament* pel jugador i en el resultat ω és aleshores senzillament el nivell d'utilitat Von Neumann i Morgenstern $u_i(\omega)$.

Sigui S el conjunt d'estratègies pures del jugador I en un joc de dos jugadors i sigui T el conjunt d'estratègies pures del jugador II. Si el jugador I utilitza l'estratègia pura s i el jugador II utilitza l'estratègia pura t, aleshores el desenvolupament del joc està completament com acabem de veure amb el joc G, i $\pi_i(s,t) = u_i(w)$. Si en canvi, en el desenvolupament del joc hi ha decisions aleatòries, el parell (s,t) defineix una *loteria* L sobre el conjunt Ω de resultats finals del joc. El pagament $\pi_i(s,t)$ que el jugador i obté quan el parell d'estratègies

(s, t) es utilitzat és la utilitat esperada de la loteria L. Es a dir,

$$\pi_i(s, t) = Eu_i(L).$$

2.3.1 El joc del duel.

Per il.lustrar la idea general de la funció de pagaments, presentem a continuació un joc d'informació perfecta, de suma zero i amb moviments aleatoris. Aquest és el joc de duel: dos duelistes s'aproximen (alternadament) un a l'altre. Cada un d'ells te una pistola amb una sola bala. La probabilitat de ferir a l'oponent augmenta amb la proximitat entre els duelistes. Quan proper ha d'estar un duelista del seu oponent abans de disparar? Aquesta és literalment una qüestió de vida o mort, doncs si un duelista dispara i falla, l'altre es pot aproximar "fins als nassos"al seu oponent amb fatals conseqüències per aquest (veure Binmore, 1992).

Una forma de modelitzar aquesta situació és la següent. Considerem que la distància inicial entre els duelistes és D. Seleccionem punts $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n$ tal que

$$0 = d_0 < d_1 < d_2 < \cdots < d_n = D.$$

Aquests punts serveixen de nusos de decisió alternatius en la representació extensiva del joc finit que es representa a la Figura 2.9 pels jugadors I i II.

En aquesta representació $\mathcal{V}$ significa que el jugador I sobreviu i, per tant, el jugador II mor. De forma paral.lela $\mathcal{D}$ significa que el jugador II sobreviu i, en conseqüència, el jugador I mor. Els nusos quadrats representen accions aleatòries en aquests nusos. L'atzar decideix si un jugador encertarà o fallarà el seu tret. La probabilitat del jugador i de ferir al seu oponent quan dispara a una distància d és $p_i(d)$. La probabilitat de fallar és doncs $1 - p_i(d)$.

La forma estratègica del joc de Duel.

El que importa sobre una estratègia pura en el joc del duel és quan proper permet un jugador arribar a l'oponent abans de disparar. Una estratègia pura que li diu a un jugador que esperi fins que l'oponent es trobi a una distància d i aleshores dispari a d la denominarem com d. Els conjunts d'estratègies són

$$S_1 = \{d_n, d_{n-2}, d_{n-4}, \ldots\}$$
$$S_2 = \{d_{n-1}, d_{n-3}, d_{n-5}, \ldots\}$$

per als jugadors I i II respectivament.

En general, si el jugador I utilitza l'estratègia d i el jugador II utilitza l'estratègia e, aleshores el resultat del joc depèn de qui dispara primer. Si $d > e$, de

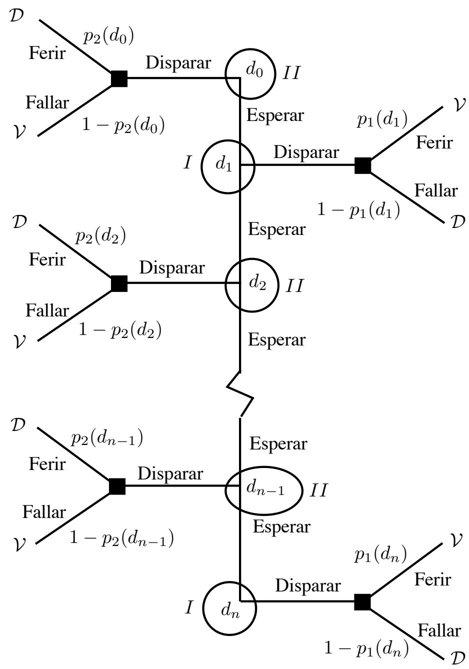

Figura 2.9: La forma extensiva del joc de Duel.

manera que el jugador I dispara primer, el resultat és la loteria $p_1(d)$. Aquesta és una loteria en la que el jugador I sobreviu amb probabilitat $p_1(d)$ i el jugador II sobreviu amb probabilitat $1-p_1(d)$. Si $d < e$, de manera que el jugador II dispara primer, el resultat és la loteria $p_2(e)$. Aquesta és una loteria en la que el jugador II sobreviu amb probabilitat $p_2(e)$ i el jugador I sobreviu amb probabilitat $1-p_2(e)$.

El pagament que obté el jugador I si utilitza l'estratègia d i el jugador II utilitza l'estratègia e és

$$\pi_1(d,e) = \begin{cases} p_1(d)u_1(\mathcal{V}) + [1-p_1(d)]u_1(\mathcal{D}), & \text{si } d > e, \\ [1-p_2(e)]u_1(\mathcal{V}) + p_2(e)u_1(\mathcal{D}), & \text{si } d < e. \end{cases}$$

De forma semblant el pagament que obté el jugador II si utilitza l'estratègia e i el jugador I utilitza l'estratègia d és

$$\pi_2(d,e) = \begin{cases} [1-p_1(d)]u_2(\mathcal{V}) + p_1(d)u_2(\mathcal{D}), & \text{si } d > e, \\ p_2(e)u_2(\mathcal{V}) + [1-p_2(e)]u_2(\mathcal{D}), & \text{si } d < e. \end{cases}$$

Per il.lustrar el joc suposem $D = 1$ i prenem els valors següents: $d_0 = 0, d_1 = 0.1, d_2 = 0.2$ etc. de manera que $d_{10} = 1$ és l'arrel de l'arbre en la representació extensiva del joc de la Figura 2.9. La probabilitat $p_1(d)$ suposem que és $1 - d$, i la probabilitat $p_2(d) = 1 - d^2$. Finalment, suposem que la funció d'utilitat

Von Neumann i Morgenstern pels jugadors I i II assigna unes valoracions u_j : $\mathcal{D}, \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $u_1(\mathcal{D}) = \sqcap_{\in}(\mathcal{V}) = \prime$ i $u_1(\mathcal{V}) = \sqcap_{\in}(\mathcal{D}) = \infty$.

Considerem, per exemple, el parell $(d_2, d_5) = (0.2, 0.5)$. Donat que $d_2 < d_5$,

$$\pi_1(d_2, d_5) = 1 - p_2(d_5) = 1 - (1 - d_5^2) = d_5^2 = 0.25;$$
$$\pi_2(d_2, d_5) = p_2(d_5) = 1 - d_5^2 = 1 - 0.25 = 0.75.$$

Aquests pagaments es troben a la casella de la Taula 2.2 definida per la columna d_5 i la fila d_2. En cada casella, el pagament del jugador I és el primer número i el pagament del jugador II el segon.

↓I/$\overrightarrow{II}$	$d_9 = 0.9$	$d_7 = 0.7$	$d_5 = 0.5$	$d_3 = 0.3$	$d_1 = 0.1$
$d_{10} = 1.0$	0.00, 1.00	0.00, 1.00	0.00, 1.00	0.00, 1.00	0.00, 1.00
$d_8 = 0.8$	0.81, 0.19	0.20, 0.80	0.20, 0.80	0.20, 0.80	0.20, 0.80
$d_6 = 0.6$	0.81, 0.19	0.49, 0.51	0.40, 0.60	0.40, 0.60	0.40, 0.60
$d_4 = 0.4$	0.81, 0.19	0.49, 0.51	0.25, 0.75	0.60, 0.40	0.60, 0.40
$d_2 = 0.2$	0.81, 0.19	0.49, 0.51	0.25, 0.75	0.09, 0.91	0.80, 0.20
$d_0 = 0.0$	0.81, 0.19	0.49, 0.51	0.25, 0.75	0.09, 0.91	0.01, 0.99

Taula 2.2: El joc del duel en forma estratègica.

2.4 La solució del joc: l'equilibri.

Considerem la següent situació estratègica (veure Scott Bierman i Fernández, 1998, p.6): una companyia petrolera (diguem-li CP per "catalan petroleum") ha comprat el dret a fer prospeccions, extraure i explotar un dipòsit de petroli de 4 milions de barrils que hi ha en un terreny. Suposem que el preu del petroli és de 20 euros/barril (wishful thinking!!) i no s'esperen canvis en aquest preu. A més, aquest dipòsit de petroli és massa petit com per afectar el preu del barril en el mercat, independentment del ritme d'extracció. CP ha de decidir el tamany del pou que vol perforar per extraure el petroli (és a dir el ritme d'extracció). El cost d'un pou ampla és de 29 milions d'euros i permet un ritme d'extracció de 6 milions de barrils l'any. En aquest cas, en (menys d') un any s'extraurà tot el petroli. El cost de bombejar el petroli és de 5 euros/barril independentment del tamany del pou. L'alternativa de fer un pou estret és més barata. Costa 16 milions d'euros i pot extraure 2 milions de barrils l'any (de manera que el pou s'exhaurirà en dos anys). Suposem finalment, que CP només te recursos per fer una perforació. La Taula 2.3 resumeix la situació:

(milions d'euros)	pou estret	pou ampla
cost de perforació	16	29
cost d'extracció	20	20
cost total	36	49
ingressos	80	80
beneficis	44	31

Taula 2.3: El negoci de perforació i extracció per la companyia CP.

Donat que l'ingrés marginal de passar d'un pou estret a un ampla (zero euros) és inferior al cost marginal (13 milions d'euros), la decisió millor és perforar un pou estret. Aquesta conclusió presuposa que CP és un monopolista sobre els drets d'extracció d'aquest pou. Estudiem ara el problema quan permeten l'entrada d'un competidor. Suposem doncs, que una segona empresa PE ("petrolis de l'Empordà") té el dret d'extracció des d'el terreny just al costat del de CP, de manera que ambdós empreses tenen accés a la mateixa bossa de petroli. PE té els mateixos costos de perforació i extracció que CP.

Si PE decideix també perforar, la quantitat de petroli que cada companyia pugui extraure depèn del tamany dels pous que perforin. Si ambdós pous són iguals, es repartiran el petroli a parts iguals, 2 milions de barrils. Si els pous són diferents, l'empresa que perfori el pou ampla extraurà 3 milions de barrils i l'altra 1 milió. La Taula 2.4 mostra en forma normal la interdependència estratègica entre ambdues empreses en termes de barrils (milions) i en termes de beneficis (milions d'euros) (exercici: escriure la forma extensiva d'aquest joc):

CP/PE (barrils)	pou estret	pou ampla
pou estret	2,2	1,3
pou ampla	3,1	2,2

CP/PE (benef.)	pou estret	pou ampla
pou estret	14,14	-1,16
pou ampla	16,-1	1,1

Taula 2.4: El joc entre CP i PE.

Suposem finalment, que ambdues empreses prenen les seves decisions simultàniament, és a dir sense conèixer la decisió de l'empresa rival. Ambdós jugadors però, coneixen la taula anterior.

La pregunta rellevant és ara, quina estratègia és la millor per a cada empresa?

2.4.1 Equilibri en estratègies dominants.

Suposem que CP ens contracta per que l'assessorem en aquesta decisió. Considerem doncs els resultats en termes de beneficis (els pagaments del joc) per la companyia CP.

- Suposem que PE decideix fer un pou estret. Quina seria la nostra millor decisió condicionada a aquesta conjectura? Mirant la taula anterior, veiem que quan PE decideix perforar un pou estret, CP obté 14 milions d'euros de beneficis si també perfora un pou estret i 16 si perfora un pou ampla. Així doncs, si esperem que PE perfori un pou estret, la nostra millor decisió és perforar un pou ampla.

- Suposem ara que PE decideix fer un pou ampla. Quina seria la nostra millor decisió condicionat a aquesta conjectura? Mirant de nou la taula anterior, veiem que quan PE decideix perforar un pou ampla, CP obté -1 milions d'euros de beneficis si perfora un pou estret i 1 si perfora un pou ampla. Així doncs, si esperem que PE perfori un pou ampla, la nostra millor decisió és perforar un pou ampla.

Combinant aquestes dues reflexions obtenim un resultat interessant. Independentment de quina sigui l'estratègia del nostre competidor, la millor decisió de CP és sempre perforar un pou ampla. Quan apareix aquesta situació diem que l'estratègia de perforar un pou ampla *domina estrictament* l'estratègia de perforar un pou estret, o de forma equivalent, l'estratègia de perforar un pou estret està *estrictament dominada* per l'estratègia de perforar un pou ampla.

Definició 2.1 (estratègia estrictament dominada). *En el joc en forma normal amb n jugadors $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, siguin $s_i \in S_i$ i $s_i^{'} \in S_i$ dues estratègies del jugador i. L'estratègia s_i està estrictament dominada per l'estratègia ${s_i}'$ si per cada combinació possible d'estratègies dels altres jugadors, el pagament que obté el jugador i utilitzant s_i és estrictament menor que el pagament que obté el jugador i quan utilitza $s_i^{'}$. Formalment,*

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i^{'}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$$
$$\forall (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n,$$

o de forma compacta,

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i^{'}, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in \prod_{j \neq i} S_j.$$

De forma equivalent podem dir que l'estratègia $s_i^{'}$ domina estrictament l'estratègia s_i.

La conseqüència immediata davant d'aquesta situació és que un jugador racional mai no utilitzarà una estratègia estrictament dominada. De la mateixa manera, un jugador racional mai no pot esperar que un rival utilitzi una estratègia estrictament dominada.

Tenim doncs un primer criteri per mirar de solucionar un joc. Esbrinem si algun jugador te alguna estratègia estrictament dominada, i eliminem-la. Si en aquest procés d'eliminació per un jugador aconseguim eliminar totes les estratègies menys una, diem que aquesta és una estratègia estrictament dominant.

Definició 2.2 (estratègia estrictament dominant). *Una estratègia per un jugador i és estrictament dominant si domina estrictament totes les altres seves estratègies.*

Com a conseqüència, quan un jugador disposi d'una estratègia estrictament dominant, aquesta serà la que utilitzarà.

En l'exemple del joc entre CP i PE, el nostre informe com assessors de CP és recomanar utilitzar l'estratègia estrictament dominant de perforar un pou ampla.

Notem que el joc entre CP i PE es simètric en el sentit que la matriu de pagaments es simètrica. Per tant si hem trobat una estratègia estrictament dominant per CP, també hem de trobar-la per PE. Els assessors de PE faran un informe recomanant a la seva companyia utilitzar l'estratègia estrictament dominant de perforar un pou ampla.

Així hem arrivat a la solució del joc: ambdues empreses CP i PE perforen un pou ampla i obtenen beneficis de 1 milió d'euros. Aquesta solució es coneix com un *equilibri en estratègies estrictament dominants*.

Definició 2.3 (equilibri en estratègies estrictament dominants). *El perfil d'estratègies $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ és un equilibri en estratègies estrictament dominants si per cada jugador i, l'estratègia $s_i \in S_i$ és una estratègia estrictament dominant.*

Una característica d'aquest joc és que s'obté un equilibri en el que els pagaments pels jugadors són inferiors al que podrien haver obtingut si haguessin coordinat les seves accions perforant ambdues un pou estret (per obtenir pagaments de 14 milions d'euros). Aquesta coordinació ens trasllada als anomenats *jocs cooperatius* que de moment deixem de banda. Els jocs al que parem atenció són jocs *no cooperatius* en el que els jugadors no tenen la possibilitat de coordinar les seves accions.

El joc entre CP i PE és un exemple del que genèricament s'anomena *joc del dilema del presoner* que veurem una mica més endavant amb detall.

Hem vist que quan tots els jugadors en un joc tenen una estratègia estrictament dominant, podem predir sense ambigüitat el resultat del joc. Què passa però si una estratègia és "quasi"però no estrictament dominant? Mirem l'exemple de la Taula 2.5:

CP/PE	pou estret	pou ampla
pou estret	14,14	0,16
pou ampla	16,0	0,0

Taula 2.5: Estratègies dèbilment dominades.

L'estratègia "pou estret"pel jugador PE no està estrictament dominada per "pou ampla". Ambdues estratègies generen pagaments zero quan el jugador CP adopta l'estratègia "pou ampla". Diem aleshores que "pou ampla" *domina dèbilment* a "pou estret", i que "pou ampla" és una *estratègia dèbilment dominant*.

Si tots els jugadors del joc tenen una estratègia dèbilment dominant el perfil d'estratègies format per les respectives estratègies dèbilment dominat formen un *equilibri en estratègies dèbilment dominants*.

2.4.2 Equilibri en estratègies reiteradament dominants

La idea de que un jugador racional utilitzara estratègies dominants no genera controvèrsia. La qüestió és que hi ha pocs jocs on podem trobar un equilibri en estratègies dominants. Necessitem doncs un concepte d'equilibri diferent per aquells jocs en els que els jugadors no disposen d'estratègies dominants. Considerem l'exemple següent consistent en reformular el joc de les prospeccions de petroli entre CP i PE ampliant els conjunts d'estratègies incorporant la possibilitat de no fer prospeccions. La Taula 2.6 mostra les distribucions de beneficis.

CP/PE	no perforar	pou estret	pou ampla
no perforar	0,0	0,44	0,31
pou estret	44,0	14,14	-1,16
pou ampla	31,0	16,-1	1,1

Taula 2.6: Estratègies reiteradament dominants (1).

Recordem que aquesta matriu de pagaments és de coneixement comú i ambdós jugadors són racionals.

Fixem-nos, en primer lloc, que l'estratègia "pou ampla" domina estrictament a l'estratègia "no perforar" però no domina estrictament a l'estratègia "pou estret" per ambdós jugadors. Per tant, aquest joc no te un equilibri en estratègies dominants.

Considerem, per exemple el jugador CP. El fet de que "pou ampla" domina estrictament a "no perforar" vol dir que CP mai no utilitzara aquesta estratègia, de manera que, a efectes de identificar les estratègies d'equilibri, podem reduir la matriu de pagaments tot eliminant la fila corresponent a l'estratègia "no perforar", tal com mostra la Taula 2.7.

CP/PE	no perforar	pou estret	pou ampla
pou estret	44,0	14,14	-1,16
pou ampla	31,0	16,-1	1,1

Taula 2.7: Estratègies reiteradament dominants (2).

Considerem ara, el jugador PE. En aquesta matriu reduïda, l'estratègia "pou ampla" domina estrictament tant l'estratègia "pou estret" com l'estratègia "no perforar", de manera que, a efectes de identificar les estratègies d'equilibri, podem reduir la matriu de pagaments tot eliminant les columnes corresponents a les estratègies "no perforar" i "pou estret". Veiem-ho a la Taula 2.8.

CP/PE	pou ampla
pou estret	-1,16
pou ampla	1,1

Taula 2.8: Estratègies reiteradament dominants (3).

Finalment, en una tercera iteració tornem a considerar el jugador CP per veure que en aquesta matriu més reduïda, l'estratègia "pou ampla"domina estrictament l'estratègia "pou estret", de manera que, a efectes de identificar les estratègies d'equilibri, podem reduir la matriu de pagaments tot eliminant la fila corresponent a l'estratègia "pou estret", com mostra la Taula 2.9,

CP/PE	pou ampla
pou ampla	1,1

Taula 2.9: Equilibri en estratègies reiteradament estrictament dominants.

per obtenir que els jugadors utilitzaran l'estratègia "pou ampla". Aquest perfil d'estratègies obtingudes eliminant successivament estratègies estrictament dominades l'anomenem *equilibri en estratègies reiteradament estrictament dominants*.

Deuria resultar obvi que un equilibri en estratègies dominants és un equilibri en estratègies reiteradament dominants (però no a la inversa).

CP/PE	pou estret	pou ampla
pou ampla	16,0	0,0

Taula 2.10: Eliminació reiterada d'estratègies dèbilment dominades (1).

CP/PE	pou ampla
pou estret	0,16
pou ampla	0,0

Taula 2.11: Eliminació reiterada d'estratègies dèbilment dominades (2)

Definició 2.4 (Estratègia reiteradament estrictament dominant). *Una estratègia és reiteradament estrictament dominant per un jugador i si i només si és l'única estratègia en $\overline{S}_i$, on $\overline{S}_i$ és la intersecció de la següent seqüència de conjunts d'estratègies iteradament subconjunts de l'anterior: (a) S_i^1 és el conjunt de totes les estratègies del jugador i que no estan estrictament dominades; (b) per $n > 1,\ S_i^n$ és el conjunt d'estratègies en S_i^{n-1} que no estan estrictament dominades quan restringim als altres jugadors $j \neq i$ a les estratègies en S_j^{n-1}.*

Definició 2.5 (Equilibri en estratègies reiteradament estrictament dominants). *El perfil d'estratègies $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ és un equilibri en estratègies reiteradament estrictament dominants si per cada jugador $i,\ s_i$ és una estratègia reiteradament estrictament dominant.*

Nota 2.1. *En l'exemple anterior, hem començat eliminant estratègies dominades del jugador CP. Ens podem preguntar si aquest ordre que hem utilitzat condiciona el resultat final del joc. La resposta (afortunadament) és que quan eliminem estratègies* estrictament *dominades l'ordre d'eliminació és irrellevant per resultat final. Aquest no és el cas quan eliminem estratègies dèbilment dominades. Considerem l'exemple de la Taula 2.5. Ja hem comentat que pel jugador PE, l'estratègia "pou ampla"* domina dèbilment *a l'estratègia "pou estreat" i pel jugador CP, l'estratègia "pou ampla"* domina dèbilment *a l'estratègia "pou estret.*

Si considerem en primer lloc el jugador CP i eliminem l'estratègia "pou estret" ens quedem amb la matriu de pagaments que mostra la Taula 2.10, de manera que el jugador PE és indiferent entre jugar "pou estret" o "pou ampla" i tenim dos equilibris (pou ampla, pou estret) i (pou ampla, pou ampla) amb pagaments associats $(16, 0)$ i $(0, 0)$ respectivament.

En canvi, si considerem en primer lloc el jugador PE i eliminem l'estratègia "pou estret" ens quedem amb la matriu de pagaments que mostra la Taula 2.11, de manera que el jugador CP és indiferent entre jugar "pou estret" o "pou am-

pla" i tenim dos equilibris (pou estreat, pou ampla) i (pou ampla, pou ampla) amb pagaments $(0, 16)$ *i* $(0, 0)$ *respectivament.*

Nota 2.2. *Tornem al concepte d'equilibri en estratègies reiteradament estrictament dominants. Aquest és un concepte d'equilibri que exigeix molta racionalitat. Necessitem coneixement comú sobre la racionalitat dels jugadors. En altres paraules cada jugador sap que ell és racional i que els rivals també són racionals; sap també que els rivals saben que ell és racional; sap també que els rivals saben que ell sap que els rivals saben que ell és racional, etc, etc, etc.*

Per visualitzar les implicacions d'aquest supòsit, considerem la següent història dels barrets*:*

Un rei te tres fills. Per designar successor els sotmet a una prova. Crida als fills i els hi posa un barret a cada un d'ells de manera que cada fill veu els barrets dels seus germans però no el propi. El rei anuncia als fills que te 5 barrets, tres negres i dos blancs. La prova consisteix en deixar als tres germans tancats en una habitació sense miralls. Al final de cada dia, el rei anirà a visitar als fills i els hi preguntara si algú sap el color del seu barret. Qui encerti primer serà el futur rei.

La seqüència d'esdeveniments és la següent:

- *al final del primer dia ningú no diu res;*
- *al final del segon dia ningú no diu res;*
- *al final del tercer dia tots tres es precipiten a la porta per a ser el primer.*

La pregunta al lector és, de quin color són els barrets dels fills del rei? Imaginemnos doncs que som un dels fills del rei.

- *Si la distribució de barrets fos dos blancs i un negre, el primer dia hages sortit el fill amb el barret negre. Com això no va passar, vol dir que aquesta no és la distribució.*
- *Si hi ha un barret blanc i jo el veig, donat que ahir no va sortir ningú, necessàriament el meu barret no pot ser blanc. En conseqüència, el meu barret és negre.*
- *Donat que el segon dia no ha sortit ningú vol dir que ningú no ha vist cap barret blanc, de manera que tots han de ser negres. Al tercer dia tots saben que tots els barrets són negres i es precipiten a la porta.*

Nota 2.3. *Tot i que la idea de l'equilibri en estratègies reiteradament estrictament dominants és atractiva i poc controvertida, hi ha molts jocs en que no ens ajuda a trobar la solució. Considerem la variació del joc de les prospeccions de petroli que mostra la Taula 2.12*

CP/PE	no perforar	pou estret	pou ampla
no perforar	0,0	0,44	0,31
pou estret	44,0	14,14	2,16
pou ampla	31,0	16,2	1,1

Taula 2.12: Variació del joc entre CP i PE (1)

CP/PE	pou estret	pou ampla
pou estret	14,14	2,16
pou ampla	16,2	1,1

Taula 2.13: Variació del joc entre CP i PE (2)

Ara, el benefici d'una empresa que perfora un pou estret quan el seu competidor perfora un pou ampla a canvi de patir una pèrdua de 2 milions d'euros, te un petit guany de 2 milions d'euros.

En aquesta situació, "no perforar"és una estratègia estrictament dominada per ambdues empreses, de manera que podem simplificar el joc i considerar la matriu de pagaments de la Taula 2.13.

En aquesta matriu ja no hi ha cap estratègia estrictament dominada. Com solucionem el joc?

2.4.3 Equilibri de Nash

La resposta a la pregunta anterior és que l'estratègia òptima de cada jugador depèn de l'estratègia que cada jugador pensa que el seu rival utilitzarà. Considerem la situació de la Taula 2.13.

Suposem que PE pensa que CP decidira perforar un pou ampla. Condicionalment a aquesta creença, la millor resposta de PE és perforar un pou estret (perquè li permet obtenir un pagament de 2 en front d'un pagament de 1 si perfores un pou ampla).

De forma semblant, suposem ara que CP pensa que PE perforara un pou estret. Condicionalment a aquesta creença, la millor resposta de CP és perforar un pou ampla (perquè li permet obtenir un pagament de 16 davant d'un pagament alternatiu de 14).

Veiem doncs que les creences d'ambdós jugadors són compatibles. En altres paraules, si ambdues empreses pensen que el perfil d'estratègies que adoptaran CP i PE és *(pou ampla, pou estret)* aleshores el millor que poden fer és precisament adoptar aquest perfil. Diem doncs que aquest és un perfil *auto-reforçant* o també *estratègicament estable*.

Aquesta manera de pensar conté el fonament de la metodologia per trobar una "estratègia racional". El parell d'estratègies *(pou ampla, pou estret)* per CP i PE respectivament l'anomenem *Equilibri de Nash* en honor de J. Nash qui va proposar aquest concepte d'equilibri en el 1951.

Definició de l'equilibri de Nash.

Mirem ara de formalitzar la idea de l'equilibri de Nash per un joc general amb n jugadors. Això és particularment fàcil d'expressar en termes de les funcions de pagament.

Definició 2.6 (Equilibri de Nash). *Considerem el joc en forma normal*

$$G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Diem que el vector d'estratègies $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$, $s_i^* \in S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *és un equilibri de Nash si per cada jugador* i, s_i^* *és la millor resposta a les estratègies especificades pels altres* $n-1$ *jugadors* $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$.

Hi ha al menys dues formulacions alternatives (i equivalents) d'aquest concepte d'equilibri.

Definició 2.7 (Equilibri de Nash). *Considerem el joc en forma normal*

$$G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Diem que el vector d'estratègies $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$, $s_i^* \in S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *és un equilibri de Nash si* s_i^* *maximitza la funció de pagaments del jugador* i *quan els altres* $n-1$ *jugadors utilitzen les estratègies* $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$. *Formalment,*

$$s_i^* = \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Definició 2.8 (Equilibri de Nash). *Considerem el joc en forma normal*

$$G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}.$$

Diem que el vector d'estratègies $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$, $s_i^* \in S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *és un equilibri de Nash si* s_i^* *maximitza la funció de pagaments del jugador* i *quan els altres* $n-1$ *jugadors utilitzen les estratègies* $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$. *Formalment,*

$$\begin{aligned} u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq & u_i(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*), \\ & \forall s_i \in S_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Aquestes definicions ens diuen que que el jugador i no pot millorar el seu pagament jugant qualsevol altra estratègia diferent de s_i^* si algun altra jugador j no es desvia de la seva estratègia s_j^*, $j \neq i$. En aquest sentit, pel jugador i, s_i^* és la millor resposta al vector d'estratègies dels altres $n-1$ jugadors s_j^*, $j \neq i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Per acabar de clarificar el significat del concepte d'equilibri, suposem, a senso contrario, que un vector d'estratègies $(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n)$, $\tilde{s}_i \in S_i$, $\forall i$ *no* és equilibri de Nash del joc en forma normal G. Això vol dir que hi ha algun jugador i pel que $\tilde{s}_i$ no és la millor resposta al vector d'estratègies $(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n)$. En altres paraules, el jugador i te una estratègia alternativa $\hat{s}_i \in S_i$ tal que

$$u_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, \hat{s}_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n) > u_i(\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_{i-1}, \tilde{s}_i, \tilde{s}_{i+1}, \ldots, \tilde{s}_n).$$

Comentaris al concepte d'equilibri de Nash.

(i) La definició d'equilibri de Nash és subtil. De fet, identificar equilibris de Nash en jocs senzills amb molts jugadors pot ser difícil. La presumpció de que els jugadors adoptaran estratègies de Nash és més controvertida que el supòsit que adoptaran estratègies estrictament dominants o reiteradament estrictament dominants. En canvi, però, el concepte d'equilibri de Nash s'ha mantingut com el concepte d'equilibri fonamental per als jocs no cooperatius.

Per entendre per què això és així hem de distingir l'*enfoc normatiu* de l'*enfoc positiu* de la teoria de jocs. Com hem vist abans, si un vector d'estratègies no és equilibri de Nash vol dir que hi ha algun jugador que pot obtenir millor resultat jugant una estratègia alternativa. Si entenem la teoria de jocs en el sentit normatiu, és a dir com una teoria que ens diu cóm un conjunt de jugadors *haurien* de jugar un cert joc, es difícil justificar qualsevol forma de jugar que sigui inconsistent amb el concepte d'equilibri de Nash (o amb la racionalitat dels oponents de cada jugador). En canvi, la teoria de jocs resulta molt més difícil de justificar sota l'enfoc positiu, és a dir com una descripció de la forma com efectivament els agents prenen decisions en una situació d'interacció estratègica. De fet, molts estudis experimentals conclouen que els jugadors de forma consistent utilitzen estratègies que no són equilibris de Nash. (Veure per exemple l'article panoràmic de Holt, 1995).

(ii) Una altra raó que fa el concepte d'equilibri de Nash controvertit és que sovint no és únic. Per exemple, en el joc de les prospeccions petroleres entre CP i PE, hem identificat el parell d'estratègies *(pou ampla, pou estret)* per CP i PE respectivament com un equilibri de Nash. De fet no és l'únic. Es fàcil verificar que el parell d'estratègies *(pou estret, pou ampla)* també és un equilibri de Nash.

La multiplicitat d'equilibris és un problema perquè el concepte d'equilibri no permet predir l'elecció d'estratègies del joc. En altres paraules, necessitem més informació al voltant del context en el que es desenvolupa el joc, de les possibilitats de comunicació entre els jugadors, etc. Hi ha dos camins de sortida. Una primera consisteix en utilitzar un altre concepte d'equilibri que permeti obtenir una solució única pel joc (per exemple l'equilibri de punt focal); l'altra és modificar ("refinar") el concepte d'equilibri de Nash de manera que seleccioni solament un dels equilibris (per exemple, l'equilibri perfecte en els subjocs).

De la mateixa manera que la multiplicitat d'equilibris és un problema, la manca d'existència és un problema igualment important sinó més. En aquest cas, la solució acostuma a ser o be canviar el concepte d'equilibri o be ampliar l'espai d'estratègies permetent, per exemple, l'us d'estratègies mixtes.

Encara que no es acceptada universalment entre els teòrics de jocs, una actitud adequada davant del problema de la selecció d'equilibris és la mateixa que te un matemàtic davant de la solució d'una equació de segon ordre. Si li preguntem quina arrel recomana com la solució "correcta"ens dirà que tal pregunta no te sentit en abstracta. Quan en un model matemàtic que mira de representar algun aspecte del món real sorgeix una equació quadràtica, computem ambdues arrels i aleshores ens preguntem quina d'elles te sentit pel fenomen particular del món real que el model tracta de descriure. Sovint una de les arrels és negativa i l'altre positiva, i podem rebutjar la primera perquè no te sentit en el món real. De forma semblant, la qüestió de quin equilibri seleccionem en un joc resulta amb freqüència inadequada fins que no introduïm el context en el que el joc s'ha d'aplicar. No estem proposant que no hi ha res a guanyar a partir dels refinaments de l'equilibri de Nash, sinó que la qüestió de quin refinament, si hem de fer-ne servir algun, deuria utilitzar-se normalment requereix més informació que la continguda en la definició estricta d'un joc. A vegades, un examen cuidadós del context ens suggerirà l'estudi d'un joc més complicat que te un únic equilibri. Més freqüentment, el teòric de jocs es troba abocat a l'exercici d'imposar el seu propi judici en la modelització del joc a l'hora de fer una selecció d'entre els equilibris disponibles.

Exemple 1: el joc de duel. Recuperem el joc de duel presentat en la secció 2.3.1. A continuació reproduïm la matriu de pagaments en la que hem assenyalat amb un asterisc (*) el millor pagament pel jugador I en cada columna i el millor pagament pel jugador II en cada fila. Per exemple, pel jugador I, 0.40 te un asterisc en la columna d_5. Això ens diu que l'estratègia d_6 és la millor resposta del jugador I a l'elecció de l'estratègia d_5 del jugador II. Sovint hi haurà vàries millors respostes. Per exemple, qualsevol estratègia diferent a d_{10} és la millor resposta del jugador I a l'elecció de l'estratègia d_9 pel jugador II.

I/II	$d_9 = 0.9$	$d_7 = 0.7$	$d_5 = 0.5$	$d_3 = 0.3$	$d_1 = 0.1$
$d_{10} = 1.0$	0.00, 1.00*	0.00, 1.00*	0.00, 1.00*	0.00, 1.00*	0.00, 1.00*
$d_8 = 0.8$	0.81*, 0.19	0.20, 0.80*	0.20, 0.80*	0.20, 0.80*	0.20, 0.80*
$d_6 = 0.6$	0.81*, 0.19	0.49*, 0.51	0.40*, 0.60*	0.40, 0.60*	0.40, 0.60*
$d_4 = 0.4$	0.81*, 0.19	0.49*, 0.51	0.25, 0.75*	0.60*, 0.40	0.60, 0.40
$d_2 = 0.2$	0.81*, 0.19	0.49*, 0.51	0.25, 0.75	0.09, 0.91*	0.80*, 0.20
$d_0 = 0.0$	0.81*, 0.19	0.49*, 0.51	0.25, 0.75	0.09, 0.91	0.01, 0.99*

Taula 2.14: El joc del duel en forma estratègica (2)

Notem que l'única casella que te els dos pagaments amb asterisc és la que correspon a la columna d_5 i a la fila d_6. Això vol dir que només el parell d'estratègies (d_5, d_6) constitueix un equilibri de Nash. En aquest equilibri, el jugador I dispara a una distància $d_6 = 0.60$.

Exemple 2: El dilema del presoner. La història és la següent: Dos sospitosos són arrestats i acusats d'una acció criminal. La policia però no te prou evidència per condemnar als sospitosos a menys que un d'ells confessi. La policia manté als sospitosos en cel.les separades i explica a cada un d'ells les conseqüències que tindran les accions que poden prendre. Aquestes accions són dos per cada jugador: confessar o no confessar. Si cap d'ells confessa, la policia els acusara d'algun delicte menor i la sentencia serà d'un mes de presó. Si ambdós confessen, aleshores seràn sentenciats a quatre mesos de presó cada un d'ells. Finalment, si un sospitós confessa i l'altre no, el primer quedarà lliure i el segon serà sentenciat a cinc mesos de presó (quatre per l'acció criminal i un altre per obstrucció a la justícia). Per completar la descripció del joc, suposem que la utililitat (von Neuman-Morgenstern) que obtenen els jugadors de x mesos de presò és $u_i(x) = -x$.

El joc en forma normal i extensiva es mostren en la Taula 2.15 i la Figura 2.10

	No Confessar	Confessar
No Confessar	-1,-1	-5,0
Confessar	0,-5	-4,-4

Taula 2.15: El dilema del presoner

Si aquest joc es juga un sola vegada, l'únic equilibri de Nash és (Confessar, Confessar). Es important assenyalar que una millor solució per ambdós

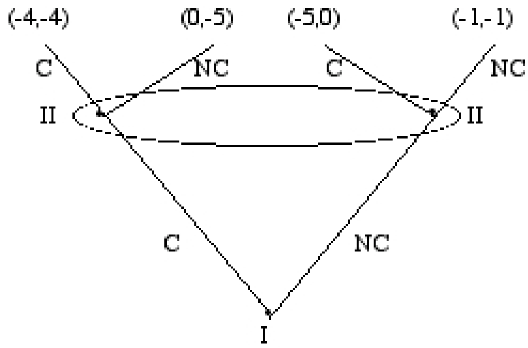

Figura 2.10: El dilema del presoner

jugadors hagués estat (No confessar, No confessar). Això vol dir que l’equilibri de Nash *no* té la propietat de la optimalitat de Pareto, i per tant els jugadors poden tenir forts incentius a obtenir resultats cooperatius en situacions no cooperatives. Aquest tema el deixarem per mes endavant quan parlem de jocs repetits.

Exemple 3: La batalla dels sexes. Una parella planeja sortir una nit. Hi ha dues possibilitats. Ella prefereix anar a l’opera, i ell prefereix anar al futbol. Ambdós però prefereixen estar junts que anar separats. Al matí cada un d’ells ha de decidir que vol fer mentre estan als seus despatxos respectius. No tenen telèfon. Així cada un d’ells pensa que li agradaria anar a veure l’espectacle preferit. Si ho aconsegueixen obtenen un nivell d’utilitat (pagament) màxim de dues unitats, si no ho aconsegueixen però van junts i aleshores obtenen un nivell d’utilitat associat al fet d’estar junts el que es tradueix en 1 unitat. Si les decisions respectives els fan anar a veure espectacles diferents, i per tant passant la vetllada separats, obtenen el pitjor pagament possible, zero.

El joc en forma normal i extensiva es mostren en la Taula 2.16 i la Figura 2.11.

↓Ella/$\overrightarrow{Ell}$	Opera	Futbol
Opera	2,1	0,0
Futbol	0,0	1,2

Taula 2.16: La batalla dels sexes.

Aquest joc, quan es juga una sola vegada, té dos equilibris de Nash (Opera, Opera) i (Futbol, Futbol).

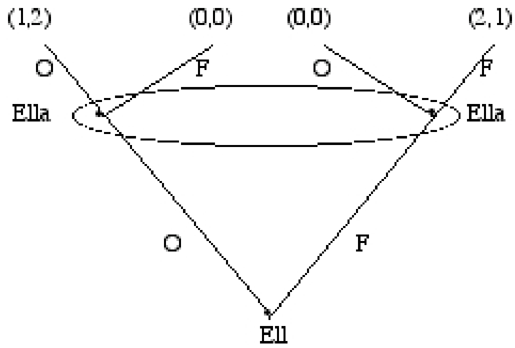

Figura 2.11: La batalla dels sexes

Relacions del concepte d'equilibri de Nash amb altres conceptes d'equilibri.

El concepte d'equilibri de Nash està relacionat amb els conceptes d'equilibri definits prèviament. En particular,

(i) Si un perfil d'estratègies és un equilibri en estratègies dominants o un equilibri en estratègies reiteradament estrictament dominants d'un joc, aleshores és l'únic equilibri de Nash d'aquest joc.

(ii) Si un perfil d'estratègies és un equilibri en estratègies dèbilment dominants d'un joc, aleshores és també un equilibri de Nash del joc, però no necessàriament l'únic.

(iii) L'eliminació d'estratègies dèbilment dominades a vegades també elimina estratègies que són equilibris de Nash.

Veiem en detall la relació entre l'equilibri en estratègies reiteradament estrictament dominants d'un joc i l'equilibri de Nash.

Proposició 2.1. *En el joc en forma normal* $G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\}$, *si el perfil d'estratègies* $(s_1^*, \dots, s_n^*)$, $s_i^* \in S_i$ *és un equilibri de Nash, aleshores aquest perfil sobreviu a l'eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades.*

Demostració. Procedirem per contradicció. Suposem que un dels elements del perfil d'estratègies $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ que és equilibri de Nash pot ser eliminat per ser estrictament dominat. Diguem-ne, sense pèrdua de generalitat, que aquest element és s_i^*. Aleshores ha d'existir una estratègia $\tilde{s}_i \in S_i$ tal que

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i^*, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, \tilde{s}_i, s_{i+1}, \dots, s_n),\ \forall s_{-i} \in S_{-i},$$

on $s_{-i} \equiv (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ i $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$.

Donat que s_i^* és la primera estratègia eliminada en el procés d'eliminació successiva, les estratègies dels altres jugadors no han estat eliminades. Un d'aquests perfils estratègies s_{-i} és precisament s_{-i}^*, de manera que,

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, \tilde{s}_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*),$$

el que es contradictori amb la definició d'equilibri de Nash. □

Proposició 2.2. *En el joc en forma normal $G = \{S_1, \ldots, S_n; u_1, \ldots, u_n\}$, si l'eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades elimina tots els perfils d'estratègies menys un $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$, $s_i^* \in S_i$, aleshores aquest perfil constitueix l'únic equilibri de Nash.*

Demostració. Hem de demostrar que si $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ és l'únic perfil que sobreviu l'eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades, aleshores és un equilibri de Nash. Procedim per contradicció.

Suposem que el procediment d'eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades només deixa $(s_1^*, \ldots, s_n^*)$ però aquest perfil no és equilibri de Nash. Aleshores ha d'haver una estratègia $s_i \in S_i$ que faci que no es satisfaci la definició d'equilibri de Nash però que ha estat eliminada per una altra estratègia $\hat{s}_i$ en algun moment del procés d'eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades. Formalment,

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*),$$

i a més $\exists \hat{s}_i \in S_i$ tal que

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \hat{s}_i, s_{i+1}, \ldots, s_n), \; \forall s_{-i}. \quad (2.1)$$

Donat que el perfil d'estratègies $(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*)$ mai s'elimina, una implicació de la desigualtat (2.1) és,

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) < u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, \hat{s}_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*).$$

Ara podem tenir dos escenaris.

(i) Si $\hat{s}_i = s_i^*$ tenim una contradicció i conclou la demostració.

(ii) Si $\hat{s}_i \neq s_i^*$ donat que ha estat eliminada en algun moment del procés, ha d'existir una estratègia $\check{s}_i \in S_i$ que l'elimini. Es a dir,

$$u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \hat{s}_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) < u_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, \check{s}_i, s_{i+1}, \ldots, s_n), \; \forall s_{-i}.$$

Aleshores, a partir de la desigualtat (2.1)

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(\hat{s}_i, s_{-i}) < u_i(\check{s}_i, s_{-i}),\ \forall s_{-i}.$$

Com les estratègies s^*_{-i} no han estat eliminades, també s'ha de verificar que

$$u_i(s_i, s^*_{-i}) < u_i(\hat{s}_i, s^*_{-i}) < u_i(\check{s}_i, s^*_{-i}),$$

és a dir

$$u_i(s_i, s^*_{-i}) < u_i(\check{s}_i, s^*_{-i}).$$

Aleshores, si $\check{s}_i = s^*_i$ obtenim una contradicció. Si pel contrari, $\check{s}_i \neq s^*_i$ vol dir que existeix una altra estratègia $\ddot{s}_i$ que elimina a $\check{s}_i$, etc, etc.

Donat que s^*_i és l'única estratègia que sobreviu al procés, la repetició d'aquest procés tanca la demostració. □

A continuació il.lustrem aquests resultats amb un parell d'exemples.

Il.lustració de (i).

Considerem el joc de dos jugadors que es mostra en la taula 2.17.

1/2	E	C	D
A	4,3	5,1	6,2
M	2,1	8,4	3,6
B	3,0	9,6	2,8

Taula 2.17: Nash vs eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades (1).

Des d'el punt de vista del jugador 2, l'estratègia C està estrictament dominada per l'estratègia D, de manera que podem eliminar-la i la matriu de pagaments es redueix a la taula 2.18.

1/2	E	D
A	4,3	6,2
M	2,1	3,6
B	3,0	2,8

Taula 2.18: Nash vs eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades (2).

Des de l'òptica del jugador 1, l'estratègia M està estrictament dominada per l'estratègia A, de manera que podem eliminar-la i la matriu de pagaments es redueix a la taula 2.19.

1/2	E	D
A	4,3	6,2
B	3,0	2,8

Taula 2.19: Nash vs eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades (3).

Des de l'òptica del jugador 1, l'estratègia B està estrictament dominada per l'estratègia A, de manera que podem eliminar-la i la matriu de pagaments es redueix a la taula 2.20.

1/2	E	D
A	4,3	6,2

Taula 2.20: Nash vs eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades (4).

Finalment, pel jugador 2 l'estratègia D està estrictament dominada per l'estratègia E, de manera que podem eliminar-la i la matriu de pagaments es redueix a la taula 2.21.

1/2	E
A	4,3

Taula 2.21: Nash vs eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades (5).

L'eliminació successiva d'estratègies estrictament dominades deixa un únic parell d'estratègies que és equilibri de Nash. Es deixa al lector verificar que el parell (A, E) és equilibri de Nash i no hi ha cap altre parell d'estratègies que sigui equilibri de Nash.

Il-lustració de (ii) i (iii).

Recuperem l'exemple de la Taula 2.5. Ja vam veure que hi havia dos equilibris en estratègies reiteradament dèbilment dominants. Segon l'ordre d'eliminació, vam obtenir be els equilibris (b, A) i (b, B) o be els equilibris (a, B) i (b, B).

Si ara calulem els equilibris de Nash d'aquest joc en trovarem tres (a, B), (b, A) i (b, B).

Per tant efectivament un equilibri en estratègies reiteradament dèbilment dominants és equilibri de Nash, pero hi ha un equilibri de Nash que no és equilibri en estratègies reiteradament dèbilment dominants. (Afirmació (ii)).

A la vegada veiem també que l'eliminació d'estratègies dèbilment dominades pot eliminar vectors d'estratègies que són equilibris de Nash. (Afirmació (iii)).

Espais d'estratègies continus vs. espais d'estratègies discrets.

Els exemples de jocs que hem vist fins ara tenen una característica comuna: els conjunts d'estratègies dels jugadors S_i tenen un número finit d'elements. Això resulta natural en jocs com el dilema del presoner o la batalla dels sexes. En canvi, te menys sentit en, per exemple, el joc entre els productors de petroli on sembla més realista que els jugadors puguin decidir qualsevol diàmetre pel pou. Hi ha molts jocs econòmics on resulta natural suposar que el conjunt d'estratègies dels jugadors conté un continu d'elements. Per exemple, jocs de quantitats, de preus, de localització, d'inversió, de política monetària, etc. L'exemple paradigmàtic d'aquest tipus de jocs és duopoli de Cournot. Veiem doncs cóm resoldre un joc quan els jugadors tenen conjunts d'estratègies continus recordant el joc de Cournot.

Imaginem un mercat d'un producte homogeni on dues empreses competeixen en la producció d'aquest be amb l'objectiu de maximitzar els seus beneficis de forma independent (es a dir, sense comunicar-se entre elles). Per portar a terme la producció, les empreses utilitzen una tecnologia de rendiments constants a escala (la mateixa per ambdues empreses) descrita per la següent funció de costos:

$$C_i(q_i) = cq_i, \quad c \in \mathbb{R}_{++}, \quad i = 1, 2,$$

on q_i representa el volum de producció de l'empresa i.

En aquest mercat hi ha consumidors dotats de preferències ben definides, que permeten derivar la demanda individual pel be en qüestió. Aquestes demandes individuals satisfan totes les propietats desitjables, de manera que les podem agregar per obtenir la demanda de mercat:

$$P(Q) = \begin{cases} a - Q & \text{si} \quad a > c, \\ 0 & \text{altrament,} \end{cases}$$

on Q representa la quantitat agregada de producte que arriba al mercat, $Q = q_1 + q_2$.

Els conjunts d'estratègies de les empreses són $S_i = [0, a]$. En altres paraules, una estratègia per una empresa és un volum de producció $q_i \in S_i$. Donades les funcions de demanda i costos, i donat que les empreses decideixen els seus volums de producció sense saber la decisió de l'empresa rival (i.e. decisions simultànies), la funció de pagaments (de beneficis) de cada empresa dependrà de la pròpia decisió així com de la decisió del rival,

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i(a - Q) - cq_i = q_i(a - c - q_i - q_j), \; i, j = 1, 2 \; i \neq j.$$

Ara ja tenim tots els ingredients per resoldre el joc de Cournot que podem representar, en forma normal, com $G = \{S_1, S_2; \pi_1, \pi_2\}$.

Per resoldre el joc hem de decidir, en primer lloc, el concepte d'equilibri que volem utilitzar. Naturalment, amb conjunts d'estratègies infinits no podem procedir a eliminar estratègies estrictament dominades, o successivament estrictament dominades. Per tant utilitzarem l'equilibri de Nash.

Definició 2.9 (Equilibri de Nash). *En aquest context, un equilibri de Nash serà un parell d'estratègies (q_1^*, q_2^*) que permetin maximitzar els beneficis d'ambdues empreses simultàniament. Altrament dit, aquest parell d'estratègies te la propietat de que quan l'empresa i pensa que l'empresa j decidirà produir q_j^*, la seva millor decisió per maximitzar els seus beneficis és precisament q_i^*. Formalment, (q_1^*, q_2^*) és un equilibri de Nash si,*

$$\pi_i(q_i^*, q_j^*) \geq \pi_i(q_i, q_j^*),\ \forall q_i \in S_i,\ i, j = 1, 2\ i \neq j.$$

Una manera alternativa d'expressar aquesta idea és,

$$q_i^* = \arg\max_{q_i \in S_i} \pi_i(q_i, q_j^*),\ i, j = 1, 2\ i \neq j.$$

Per trobar aquest parell d'estratègies (q_1^*, q_2^*), utilitzarem el teorema següent,

Teorema 2.1. *Si $f(x, y)$ és dues vegades contínuament diferenciable i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) < 0$ per tots els valors en el seu domini, aleshores x^* és un màxim global de f si i només si satisfà la condició de primer ordre per un màxim, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y) = 0$.*

Aplicant aquest teorema al nostre exemple, la funció de pagaments del jugadors és dues vegades contínuament diferenciable i la segona derivada és negativa per qualsevol $q_i \in S_i$:

$$\begin{aligned} \pi_i(q_i, q_j) &= q_i(a - c - q_i - q_j), \\ \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i^*, q_j) &= a - c - 2q_i^* - q_j, \\ \frac{\partial^2 \pi_i}{\partial q_i^2}(q_i, q_j) &= -2 < 0. \end{aligned}$$

Examinem doncs la condició de primer ordre:

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i^*, q_j) = a - c - 2q_i^* - q_j = 0.$$

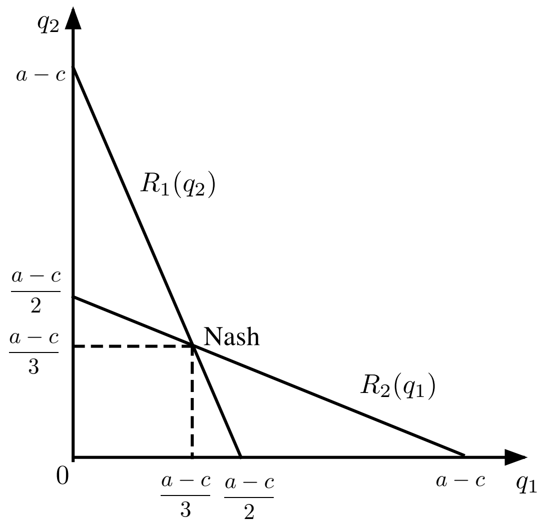

Figura 2.12: El joc de Cournot

Aquesta la podem expressar com,

$$q_i^*(q_j) = \frac{a - c - q_j}{2}.$$

Aquesta funció que resulta de resoldre la condició de primer ordre s'anomena *funció de reacció* o també *funció de resposta òptima* del jugador i. Genèricament la representem com $q_i^*(q_j)$ i la interpretem com aquella estratègia q_i^* que permet maximitzar el pagament del jugador i quan aquest preveu que el jugador j utilitzarà l'estratègia $q_j \in S_j$.

Escrivim explícitament les condicions de primer ordre de cada jugador,

$$q_1^*(q_2) = \frac{a - c - q_2}{2}$$
$$q_2^*(q_1) = \frac{a - c - q_1}{2}.$$

La figura 2.12 representa aquestes funcions. Si resolem aquest sistema d'equacions obtenim $q_i^* = \dfrac{a-c}{3}$, és a dir l'estratègia òptima per ambdós jugadors és produir una quantitat $(a-c)/3$. Aquest parell de volums de producció és precisament l'equilibri de Nash-Cournot. Els pagaments (beneficis) que obtenen els jugadors són $\pi_i^* = \dfrac{(a-c)^2}{9}$.

Fixem-nos que gràficament, l'equilibri de Nash és precisament el punt d'intersecció de les funcions de reacció. En altres paraules, les estratègies d'equilibri de Nash són un punt fix de les funcions composades $q_1(q_2(q_1))$ i $q_2(q_1(q_2))$.

Podem resumir aquesta discussió en el següent,

Teorema 2.2. *Suposem que dos jugadors juguen un joc estàtic on els conjunts d'estratègies per ambdós jugadors* (S_1, S_2) *estan representats per punts sobre la recta real i les funcions de pagament respectives són estrictament còncaves i dues vegades contínuament diferenciables en la pròpia estratègia del jugador. Denotem per* $s_i(s_j)$ *on* $s_j \in S_j$*, la funció de reacció del jugador* i*. Aleshores* (s_1^*, s_2^*) *és un equilibri de Nash d'aquest joc si i només si* $s_1(s_2^*) = s_1^*$ *i* $s_2(s_1^*) = s_2^*$*.*

2.4.4 Existència d'equilibri de Nash.

El supòsits del model són els següents:

(i) és un model estàtic.

(ii) Hi ha un número n de jugadors. Aquest número és fix i finit.

(iii) Cada jugador i te un conjunt d'estratègies $S_i \subset \mathbb{R}$ compacte.

(iv) Els jugadors tenen com a objectiu la maximització del seu pagament. En el procés de decisió, els jugadors són conscients de les interaccions estratègiques entre ells.

(v) Sigui $s = (s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n)$; $s_i \in S_i$ un vector d'estratègies; $\pi_i(s)$ denota la funció de pagaments del jugador i. Una distribució de pagaments entre els jugadors és un vector $\pi(s) = (\pi_1(s), \pi_2(s), \pi_3(s), \ldots, \pi_n(s))$. La funció de pagaments la suposem *contínua, contínuament diferenciable* i *estrictament còncava en* s_i. Formalment,

1. $\pi_i : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
2. π_i és C^2 $\forall s_i$
3. $\pi_i(s)$ és estrictament còncava en s_i, $\forall s$ t.q. $s_i \in S_i$.

El supòsit sobre la concavitat estricta de la funció de pagaments vol dir $\frac{\partial^2 \pi_i}{\partial s_i^2} < 0$. Això ens assegura que sempre hi ha una única estratègia s_i^* maximitzadora del pagament per qualsevol $s_{-i} \equiv (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$.

Definim el conjunt de tots els vectors d'estratègies factibles com $S \subset \mathbb{R}^n$

Teorema 2.3. *Si les hipòtesis (i) fins (v) es compleixen, aleshores existeix un equilibri (interior) de Cournot.*

Demostració. Dividirem la demostració en tres parts. En primer lloc demostrarem l'existència de funcions de reacció (lema 2.1); a continuació demostrarem que aquestes funcions de reacció són contínues (lema 2.2); finalment verificarem que podem aplicar el teorema de punt fix de Brower.

Lema 2.1. *Sota els supòsits del model existeix una funció de reacció per cada jugador.*

Demostració. Considerem un vector arbitrari d'estratègies $s_{-i} \in S_{-i}$. Donat que $\pi_i(s_i, s_{-i})$ és contínua en $s_i,\ s_i \in S_i$ i estrictament còncava, i donat que S_i és compacte podem escriure la condició de primer ordre de la maximització de pagaments,

$$\frac{\partial \pi_i(s_i, s_{-i})}{\partial s_i} = 0$$

com una funció

$$s_i = w_i(s_{-i})$$

que denominem funció de reacció del jugador i. Aquesta funció ens diu quina és l'estratègia maximitzadora del pagament del jugador i condicional a un vector d'expectatives del jugador i sobre el comportament dels altres $(n-1)$ jugadors. $\square$

Definim ara una projecció contínua, $w(s)$, bijectiva del conjunt compacte S en ell mateix,

$$w(s) = \Big(w_1(s_{-1}), w_2(s_{-2}), \ldots, w_n(s_{-n})\Big)$$

Lema 2.2. $w_i(s_{-i})$ *és una funció contínua.*

Demostració. Sigui $\{\overline{s}_{-i}\}_{\tau=1}^{\infty}$ una seqüència de vectors d'estratègies en S_{-i}, tal que $\lim_{\tau\to\infty} s^{\tau}_{-i} = s^{o}_{-i}$.

Donat que S_{-i} és compacte, sabem que $s^{o}_{-i} \in S_{-i}$.

La seqüència $\{\overline{s}_{-i}\}_{\tau=1}^{\infty}$ ens permet obtenir una seqüència $\{w_i(s^{\tau}_{-i})\}_{\tau=1}^{\infty}$ on $w_i(s^{\tau}_{-i}) \in S_i$.

Sigui ara,

$$\begin{aligned} s_i^{\tau} &= w_i(s^{\tau}_{-i}) \\ s_i^{o} &= w_i(s^{o}_{-i}). \end{aligned}$$

Diem que w_i és contínua si $\lim_{\tau\to\infty} s_i^{\tau} = s_i^{o}$.

Per definició,

$$\pi_i\Big(w_i(s^{\tau}_{-i}), s^{\tau}_{-i}\Big) \geq \pi(s_i, s^{\tau}_{-i}),\ s_i \in S_i.$$

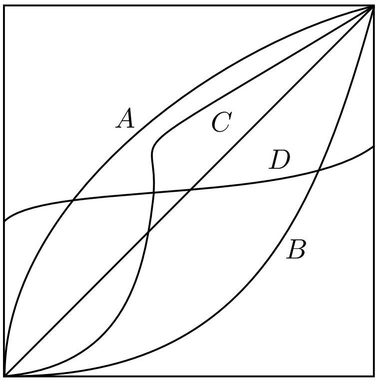

Figura 2.13: El Teorema de punt fix de Brower

Per la continuïtat de la funció de pagaments,

$$\lim_{\tau\to\infty} \pi_i\Big(w_i(s^\tau_{-i}), s^\tau_{-i}\Big) = \pi_i\Big(\lim_{\tau\to\infty} w_i(s^\tau_{-i}), s^o_{-i}\Big)$$
$$\lim_{\tau\to\infty} \pi(s_i, s^\tau_{-i}) = \pi(s_i, s^o_{-i}),$$

de manera que podem escriure,

$$\pi_i\Big(\lim_{\tau\to\infty} w_i(s^\tau_{-i}), s^o_{-i}\Big) \geq \pi(s_i, s^o_{-i}),\ s_i \in S_i.$$

Donat que $w_i(s_{-i})$ és una funció,

$$\lim_{\tau\to\infty} w_i(s^\tau_{-i}) = w_i(s^o_{-i})$$

o de forma equivalent,

$$\lim_{\tau\to\infty} s^\tau_i = s^o_{-i},$$

de manera que $w_i(s_{-i})$ és una funció contínua. $\square$

Enunciem a continuació (sense demostració) el teorema de punt fix de Brower.

Teorema 2.4 (Brower). *Sigui X un conjunt convex i compacte a $\mathbb{R}^n$. Sigui $f : X \to X$ una aplicació continua que associa un punt $f(x)$ de X a cada punt x de X. Aleshores existeix un punt fix $\widehat{x} = f(\widehat{X})$.*

La interpretació gràfica del teorema es mostra a la figura 2.13 on $X = [0, 1]$.

A partir del teorema de punt fix de Brower, donat que S és compacte i $w(s)$ contínua, podem assegurar que existeix almenys un punt s^* tal que $w(s^*) = s^*$, on s^* és l'equilibri de Cournot. $\square$

2.4.5 Equilibri de punt focal.

Ja hem comentat abans que la multiplicitat d'equilibris de Nash és un problema perquè el concepte d'equilibri no permet predir l'elecció d'estratègies del joc. També vam comentar que una possibilitat per superar aquesta dificultat és utilitzar un altre concepte d'equilibri. Un d'aquests conceptes d'equilibri alternatius és l'anomenat equilibri de punt focal proposat per Schelling (1960). Un joc de cara i creu com el següent te dos equilibris (cara, cara) i (creu, creu).

A/B	cara	creu
cara	3,2	0,0
creu	0,0	2,3

Taula 2.22: El joc de cara i creu (1).

Donat que hi ha dos equilibris, cóm decidiran els jugadors quin escollir? Aquest és un problema de coordinació. Schelling va suggerir que en aquests casos pot ser un dels equilibris pot destacar-se dels altres degut a algun tipus d'asimetria que és de coneixement comú per ambdós jugadors. Schelling no va formalitzar aquesta idea. De fet, la mateixa idea de punt focal no és fàcil de formalitzar. Fonamentalment, la idea de punt focal es basa en resultats experimentals. En el joc de cara o creu anterior, si els jugadors decideixen aleatòriament cara o creu tenen un 50% de possibilitats de que la coordinació tingui èxit. En aquest cas, el pagament esperat és 1.25 inferior a 2 ó 3. Schelling va trobar que en experiments els individus amb el rol de jugador A van decidir jugar "cara"el 73% de les vegades i els individus amb el rol de jugador B van decidir jugar "cara"el 68% de les vegades. Això representa una millor coordinació de la que observaríem sota comportaments aleatoris tot i el biaix en contra del jugador B. Aquesta distribució de probabilitat dona pagaments esperats 1.662 i 1.252 als jugadors A i B respectivament[2] que són superiors als pagaments esperats associats al comportament aleatori.

Es important senyalar que si ambdós jugadors miren d'obtenir el pagament de 3, acabaran obtenint zero.

L'interès fonamental de la solució de Schelling és que senyala que hi ha aspectes del joc que són importants a l'hora de determinar cóm els jugadors juguen el joc, però que estan fora de la manera habitual de formalitzar la teoria.

[2] El càlcul del pagaments esperats és el següent:

$$E\pi_A = (.68)(.73)3 + (.32)(.27)2 = 1.4892 + .1728 = 1.662,$$
$$E\pi_B = (.73)(.68)2 + (.27)(.32)3 = .9928 + .2592 = 1.252.$$

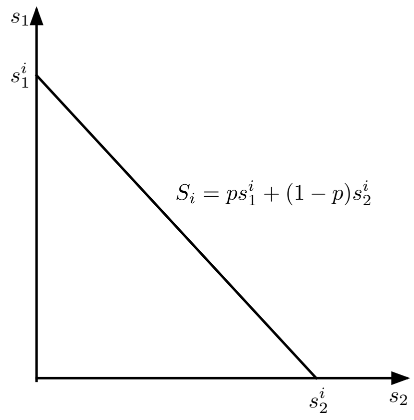

Figura 2.14: Estratègies pures i mixtes

2.4.6 Estratègies mixtes.

Què podem fer davant d'un joc que no te equilibris de Nash en estratègies pures?. Ja hem comentat abans que una sortida a aquest problema és ampliar l'espai d'estratègies dels jugadors, per exemple permetent que puguin decidir de forma aleatòria entre les estratègies pures en el seus conjunts d'estratègies. Per veure que efectivament ampliem l'espai d'estratègies d'un jugador, pensem en un jugador i que te un conjunt d'estratègies pures $\{s_1^i, s_2^i\}$. Si ara permetem que utilitzi una distribució de probabilitat p en aquest conjunt d'estratègies obtenim el conjunt d'estratègies mixtes $ps_1^i + (1-p)s_2^i$, $p \in [0,1]$. Notem que les estratègies pures s_1 són un cas particular particular d'estratègies mixtes on la distribució de probabilitat és degenerada. Així per $p = 1$ obtenim $ps_1^i + (1-p)s_2^i = s_1^i$ i per $p = 0$ obtenim $ps_1^i + (1-p)s_2^i = s_2^i$. Aquest argument es presenta gràficament en la Figura 2.14.

Una implicació immediata de l'utilització d'estratègies mixtes (aleatòries) és que el resultat del joc és aleatori i per tant els pagaments associats als resultats del joc també són aleatoris.

Per tal de poder resoldre el joc necessitem modificar el supòsit sobre el comportament dels jugadors. Ara l'objectiu dels jugadors serà maximitzar el pagament esperat, d'acord amb la teoria de l'utilitat esperada.

Per ser precisos, considerem un joc de dos jugadors (1 i 2). Els conjunts d'estratègies dels jugadors són $S_1 = \{s_1^1, s_2^1, \ldots, s_K^1\}$ i $S_2 = \{s_1^2, s_2^2, \ldots, s_L^2\}$ respectivament. Suposem que el jugador 1 defineix una distribució de probabilitat $P = (p_1, p_2, \ldots, p_K)$ que li permet definir l'estratègia mixta $m_1 = (p_1 s_1^1, p_2 s_2^1, \ldots, p_K s_K^1)$ on $\sum_{j=1}^K p_j = 1$. Suposem de forma semblant, que el jugador 2 defineix una distribució de probabilitat $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_L)$ que utilitza per construir l'estratègia mixta $m_2 = (q_1 s_1^2, q_2 s_2^2, \ldots, q_L s_L^2)$ on $\sum_{j=1}^L q_j = 1$. Suposem finalment, que quan el jugador 1 utilitza l'estratègia pura s_i^1 i el jugador 2 utilitza l'estratègia pura s_j^2, el pagament pel jugador 1 és π_{ij}^1 i pel jugador 2 és π_{ij}^2 . Aleshores, el pagament esperat pel jugador i quan els jugadors utilitzen les estratègies m_1 i m_2 respectivament és,

$$EU_i = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{L} \pi_{ij}^i p_i q_j, \quad i = 1, 2.$$

Definició 2.10 (Estratègia mixta). *Considerem el joc en forma normal de n jugadors $G = \{S_1, S_2, \ldots, S_n; u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, on $S_i = \{s_1^i, s_2^i, \ldots, s_K^i\}$. Una estratègia mixta pel jugador i és una distribució de probabilitat $p_i = \{p_1^i, p_2^i, \ldots, p_K^i\}$ on $0 \leq p_k^i \leq 1$ per $k = 1, 2, \ldots, K$ i $\sum_{k=1}^{K} p_k^i = 1$ sobre el conjunt S_i.*

Definició 2.11 (Equilibri de Nash en estratègies mixtes). *Un equilibri de Nash en estratègies és ara un vector d'estratègies mixtes tal que l'estratègia mixta de cada jugador és la resposta òptima a la combinació d'estratègies mixtes dels altres jugadors. Formalment, és un parell d'estratègies (m_1^*, m_2^*) tal que*

$$EU_i(m_i^*, m_j^*) \geq EU_i(m_i, m_j^*), \; \forall m_i \in S_i, \; \forall i$$

Les estratègies mixtes són necessàries per assegurar l'existència d'equilibri de Nash en alguns jocs. Però és suficient? Hi ha jocs que no tenen equilibri de Nash quan permetem als jugadors utilitzar estratègies mixtes? El següent teorema respon la pregunta.

Teorema 2.5. *Tot joc amb un número finit de jugadors en el que cada jugador te un número finit d'estratègies pures, te al menys un equilibri de Nash, pot ser en estratègies mixtes.*

Abans de proposar un argument gràfic per il.lustrar la demostració d'aquest teorema, considerem alguns exemples.

Exemple 1 Considerem el joc anterior pel cas $K = L = 2$ de forma que $S_1 = \{A, B\}$ i $S_2 = \{D, E\}$. La forma normal del joc es mostra en la Taula 2.23.

1/2	D	E
A	π_{AD}^1, π_{AD}^2	π_{AE}^1, π_{AE}^2
B	π_{BD}^1, π_{BD}^2	π_{BE}^1, π_{BE}^2

Taula 2.23: Estratègies mixtes.

Si el jugador 1 espera que el jugador 2 utilitzi l'estratègia D, els pagaments esperats per ambdós jugadors quan ell utilitza l'estratègia mixta m_1 són,

$$EU_1(m_1, D) = p_A\pi^1_{AD} + P_B\pi^1_{BD} = \sum_{i=A,B} p_i\pi^1_{iD}, \quad p_A + p_B = 1,$$
$$EU_2(m_1, D) = p_A\pi^2_{AD} + P_B\pi^2_{BD} = \sum_{i=A,B} p_i\pi^2_{iD}.$$

Si el jugador 1 espera que el jugador 2 utilitzi una estratègia mixta m_2, els pagaments esperats per ambdós jugadors quan ell utilitza l'estratègia mixta m_1 són,

$$\begin{aligned}
EU_1(m_1, m_2) = {} & p_A[q_E\pi^1_{AE} + q_D\pi^1_{AD}] + p_B[q_E\pi^1_{BE} + q_D\pi^1_{BD}] = \\
& \pi^1_{AD}p_Aq_D + \pi^1_{BD}p_Bq_D + \pi^1_{AE}p_Aq_E + \pi^1_{BE}p_Bq_E = \\
& \sum_{j=D,E} \pi^1_{Aj}p_Aq_j + \sum_{j=D,E} \pi^1_{Bj}p_Bq_j = \\
& \sum_{i=A,B}\sum_{j=D,E} \pi^1_{ij}p_iq_j \\
EU_2(m_1, m_2) = {} & q_D[p_A\pi^2_{AD} + p_B\pi^2_{BD}] + q_E[p_A\pi^2_{AE} + p_B\pi^2_{BE}] = \\
& \sum_{i=A,B}\sum_{j=D,E} \pi^2_{ij}p_iq_j.
\end{aligned}$$

on $p_A + p_B = q_D + q_E = 1$.

Exemple 2 Els jugadors de poker saben que fer "farols"pot resultar profitós. Si un jugador només aposta fort quan te una bona ma, els altres jugadors ràpidament s'adonaran. Per tant, quan el nostre jugador aposti fort, els altres anticiparan que te una bona ma, es retiraran i els guanys seran minsos. En canvi si de tant en tant el nostre jugador fa un farol, els rivals no saben si quan aposta fort te una ma bona o dolenta.

Com a resultat pot passar que el farol engresqui als altres jugadors i apostin fort quan el nostre jugador te una bona ma. En aquest cas els guanys seran importants.

Exemple 3 Considerem la següent versió del joc de cara i creu. Quan els dos jugadors seleccionen la mateixa estratègia (i.e. (C,C) o (+,+)) el jugador 1 paga al jugador 2 una moneda; en altre cas és el jugador 1 qui reb la moneda del jugador 2. La matriu de pagaments d'aquest joc es mostra en la Taula 2.24.

Aquest joc no te cap equilibri de Nash en estratègies pures. (Verificar-ho). Podem trobar un equilibri utilitzant estratègies mixtes? Suposem que el

1/2	cara	creu
cara	-1, 1	1, -1
creu	1, -1	-1, 1

Taula 2.24: El joc de cara i creu (2).

jugador 1 utilitza una distribució de probabilitat $m_1 = (p, (1-p))$, i el jugador 2 utilitza una altra distribució de probabilitat $m_2 = (q, (1-q))$.

Hi ha dues maneres de calcular l'equilibri de Nash (que ja sabem pel Teorema 6 que existeix). Per una banda podem calcular la resposta òptima de cada jugador a l'estratègia mixta del rival. Alternativament podem maximitzar el pagament esperat per cada jugador quan utilitzen les respectives estratègies mixtes.

Càlcul de les funcions de resposta òptima. Considerem en primer lloc el jugador 1 quan el jugador 2 utilitza l'estratègia mixta m_2.

Si el jugador 1 utilitza l'estratègia C obté $-1q + 1(1-q) = 1 - 2q$.

Si el jugador 1 utilitza l'estratègia $+$ obté $1q - 1(1-q) = 2q - 1$.

Donat que $1 - 2q \geq 2q - 1$ quan $q \leq 1/2$, és fàcil veure que,

- per $q < 1/2$ la resposta òptima és $RO_1(q) = C$.
- per $q > 1/2$ la resposta òptima és $RO_1(q) = +$.
- per $q = 1/2$ el jugador 1 és indiferent entre jugar cara o creu, de manera que qualsevol distribució de probabilitat p li genera el mateix guany.

Formalment,

$$RO_1(q) = \begin{cases} C & \text{si} \quad q < \frac{1}{2}, \\ p \in [0,1] & \text{si} \quad q = \frac{1}{2}, \\ + & \text{si} \quad q > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Considerem ara el jugador 2 quan el jugador 1 utilitza l'estratègia mixta m_1.

Si el jugador 2 utilitza l'estratègia C obté $-1p + 1(1-p) = 1 - 2p$.

Si el jugador 2 utilitza l'estratègia $+$ obté $1p - 1(1-p) = 2p - 1$.

Donat que $1 - 2p > 2p - 1$ quan $p < 1/2$ i $1 - 2p < 2p - 1$ quan $p > 1/2$, el mateix raonament que abans ens permet concloure que,

$$RO_2(p) = \begin{cases} + & \text{si} \quad p < \frac{1}{2}, \\ q \in [0,1] & \text{si} \quad p = \frac{1}{2}, \\ C & \text{si} \quad p > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

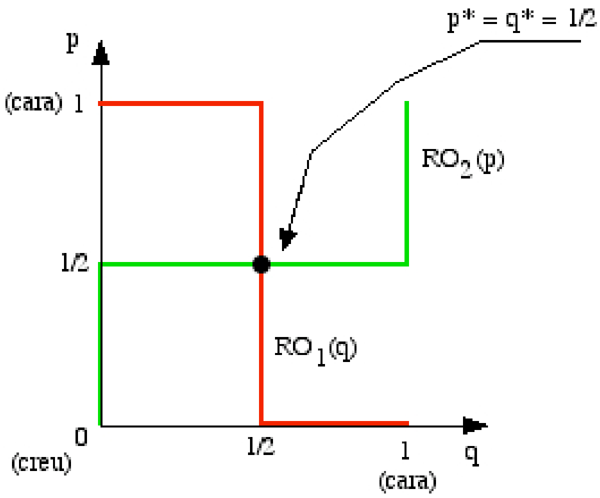

Figura 2.15: Equilibri de Nash en estratègies mixtes

L'equilibri de Nash és el parell (m_1, m_2) que fa compatibles ambdues funcions de resposta òptima. Es immediat veure que l'equilibri és,

$$(p^*, q^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Gràficament, el(s) vector(s) d'estratègies equilibri(s) de Nash són els punts d'intersecció de les funcions de millor resposta. La Figura 2.15 mostra la situació.

Maximització dels pagaments esperats. El pagament esperat pel jugador 1 quan ell utilitza l'estratègia m_1 i el jugador 2 utilitza l'estratègia m_2 és

$$\begin{aligned} EU_1(p,q) =& p[q(-1) + (1-q)(1)] + (1-p)[q(1) + (1-q)(-1)] = \\ =& (2q-1) + 2(1-2q)p. \end{aligned}$$

El problema que resol el jugador 1 és $\max_p EU_1(p,q)$. La condició de primer ordre és,

$$\frac{\partial EU_1}{\partial p} = 2(1-2q) \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad q < \frac{1}{2}, \\ = 0 & \text{si} \quad q = \frac{1}{2}, \\ < 0 & \text{si} \quad q > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

En altres paraules, $EU_1(p,q)$ és una funció lineal en p. Quan $q < 1/2$ el pagament esperat del jugador 1 es creixent en p, de manera que el

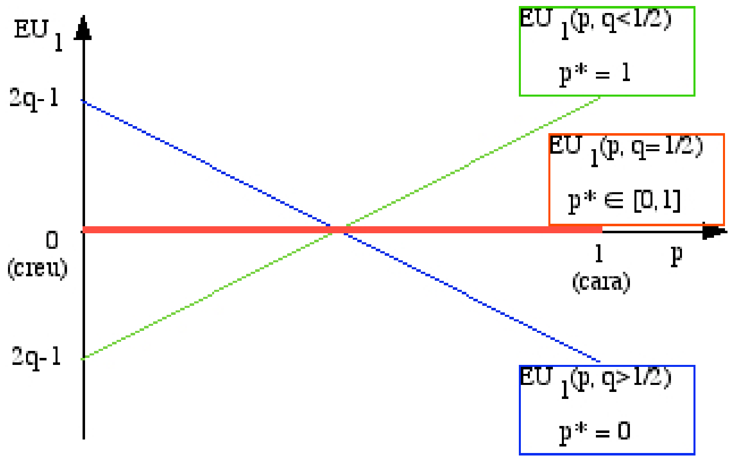

Figura 2.16: Funció de pagament esperat del jugador 1

màxim de la funció $EU_1(p,q)$ es troba en la cantonada $p = 1$; quan $q > 1/2$ el pagament esperat del jugador 1 es decreixent en p, de manera que el màxim de la funció $EU_1(p,q)$ es troba en la cantonada $p = 0$; finalment, quan $q = 1/2$ el jugador 1 maximitza el seu pagament independentment de quina sigui la distribució de probabilitat $(p,(1-p)$ que utilitzi. (Fixem-nos que per $q = 1/2$ la funció de pagament esperat del jugador 1 és $EU_1(p,1/2) = 2q - 1$, i per tant, independent de p.) La Figura 2.16 representa aquest argument.

Podem interpretar aquesta condició de primer ordre en termes de la funció de resposta òptima del jugador 1:

$$RO_1(q) = \begin{cases} C & \text{si} \quad q < \frac{1}{2}, \\ p \in [0,1] & \text{si} \quad q = \frac{1}{2}, \\ + & \text{si} \quad q > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

que és precisament l'obtinguda abans. Podem fer un raonament paral.lel pel jugador 2, de manera que la figura 2.15 ens il.lustra l'únic equilibri de Nash d'aquest joc, en el que els jugadors juguem de forma perfectament aleatòria les seves estratègies pures.

Exemple 4 Considerem el següent joc en el que $S_1 = \{A,B\}$ i $S_2 = \{E,C,D\}$. Una estratègia mixta pel jugador 1 és una distribució de probabilitat $(t,(1-t))$ sobre el conjunt S_1. Una estratègia mixta pel jugador 2 és, com abans, una distribució de probabilitat $(q,r,(1-q-r))$. El jugador 2 juga l'estratègia E amb probabilitat q, l'estratègia C amb probabilitat r i l'estratègia D amb probabilitat $1-q-r$.

1/2	E	C	D
A	1,0	1,2	0,1
B	0,3	0,1	2,0

Taula 2.25: Estratègies mixtes amb més de dues estratègies pures.

Les funcions de pagament esperat per ambdós jugadors són doncs,

$$\begin{aligned}
EU_1(t;q,r) =&t[q(1)+r(1)+(1-q-r)(0)]+\\
&(1-t)[q(0)+r(0)+(1-q-r)(2)] = 2(1-q-r)+t(3q+3r-2),\\
EU_2(t;q,r) =&q[t(0)+(1-t)(3)]+r[t(2)+(1-t)(1)]+\\
&(1-q-r)[t(1)+(1-t)(0)] = r-q(4p-3)+p.
\end{aligned}$$

El problema del jugador 1 és trovar el valor de p (de la distribució de probabilitat) que li permet obtenir el màxim pagament, és a dir,

$$\frac{\partial EU_1}{\partial p} = 3q+3r-2 \begin{cases} >0 & \text{si} \quad q+r>\frac{2}{3}, \\ =0 & \text{si} \quad q+r=\frac{2}{3}, \\ <0 & \text{si} \quad q+r<\frac{2}{3}. \end{cases}$$

El jugador 2 ha de seleccionar el parell (q,r) (la distribució de probabilitat) maximitzador del seu pagament esperat,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial EU_2}{\partial q} &= 3-4t,\\
\frac{\partial EU_2}{\partial r} &= 1.
\end{aligned}$$

La condició de primer ordre en respecte a r implica que el valor òptim és $r^* = 1$. En conseqüència, $q^* = 0$. Donat que $q^*+r^* > 2/3$, aleshores obtenim $t^* = 1$. En altres paraules, Aquest joc te un únic equilibri de Nash en el que el jugador 1 utilitza l'estratègia pura A i el jugador 2 utilitza l'estratègia pura C.

Es inmediat verificar que aquest equilibri de Nash també és un equilibri en estratègies reiteradament estrictament dominants.

Exemple 5 L'exemple 3 ens ha presentat una situació on la no existència d'equilibri de Nash en estratègies pures es supera utilitzant estratègies mixtes. Sota aquesta nova perspectiva, el joc te un únic equilibri de Nash. Una situació diferent consisteix en un joc que te multiplicitat d'equilibris de

Nash en estratègies pures, i el conjunt d'equilibris augmenta quan considerem estratègies mixtes. Considerem la següent versió del joc de la batalla dels sexes.

Dos amics decideixen independentment, comprar-se un reproductor de vídeo. Poden decidir adquirir un aparell amb tecnologia Beta o VHS. L'amic 1 te una certa preferència per la tecnologia Beta. L'amic 2 en canvi prefereix la tecnologia VHS. Si ambdós coincideixen en la seva decisió es podran intercanviar cintes, el que representa un element addicional de satisfacció. En cas contrari no ho podran fer. La forma normal d'aquest joc de tipus batalla dels sexes és:

1/2	Beta	VHS
Beta	2,1	0,0
VHS	0,0	1,2

Taula 2.26: Una versió de la batalla dels sexes.

Aquest joc te dos equilibris en estratègies pures: (Beta, Beta) i (VHS,VHS). Augmenta el conjunt d'equilibris si els jugadors poden utilitzar estratègies de forma aleatòria? Suposem que el jugador 1 utilitza l'estratègia mixta $m_1 = (p, 1-p)$ i el jugador 2 utilitza l'estratègia mixta $m_2 = (q, 1-q)$ on $p, q \in [0, 1]$.

Calculem el pagament esperat d'aquest parell d'estratègies per jugador 1. L'objectiu d'aquest jugador és

$$\max_p Eu_1(p,q) = p[q2+(1-q)0]+(1-p)[q0+(1-q)1] = 1-q+(3q-1)p.$$

La resposta òptima del jugador 1 davant de l'ús de l'estratègia m_2 pel jugador 2 ve donada per la condició de primer ordre,

$$\frac{\partial Eu_1(p)}{\partial p} = 3q-1 \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad q > \frac{1}{3}, \\ = 0 & \text{si} \quad q = \frac{1}{3}, \\ < 0 & \text{si} \quad q < \frac{1}{3}, \end{cases}$$

de manera que,

$$RO_1(q) = \begin{cases} \text{Beta} & \text{si} \quad q > \frac{1}{3}, \\ p \in [0,1] & \text{si} \quad q = \frac{1}{3}, \\ \text{VHS} & \text{si} \quad q < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Es a dir, si el jugador 1 espera que el seu amic decideixi comprar un vídeo Beta amb probabilitat superior (inferior) a 1/3, la seva millor resposta és comprar un vídeo amb tecnologia Beta (VHS). Si en canvi pensa que el seu amic es decidirà per un vídeo Beta amb probabilitat 1/3, aleshores el seu pagament esperat és 2/3 independent de la seva decisió.

Podem fer l'anàlisi corresponent pel jugador 2. El seu objectiu és,

$$\max_q Eu_2(p,q) = q[p1+(1-p)0]+(1-q)[p0+(1-p)2] = 2(1-p)+q(3p-2),$$

de manera que,

$$\frac{\partial Eu_2(q)}{\partial q} = 3p-2 \begin{cases} > 0 & \text{si} \quad p > \frac{2}{3}, \\ = 0 & \text{si} \quad p = \frac{2}{3}, \\ < 0 & \text{si} \quad p < \frac{2}{3}, \end{cases}$$

i per tant,

$$RO_2(p) = \begin{cases} \text{Beta} & \text{si} \quad p > \frac{2}{3}, \\ q \in [0,1] & \text{si} \quad p = \frac{2}{3}, \\ \text{VHS} & \text{si} \quad p < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

La interpretació d'aquesta funció de resposta òptima és similar a la del jugador 1.

Si resolem ambdues funcions de reacció per p i q, obtenim $p^* = 2/3$ i $q^* = 1/3$ que representa un equilibri (interior) en estratègies mixtes, que s'afegeix als dos equilibris (de cantonada) en estratègies pures que ja havíem identificat.

La figura 2.17 representa el conjunt d'equilibris.

Estratègies mixtes i estratègies estrictament dominades.

Examinem a continuació la relació entre la dominància estricta d'estratègies i les estratègies mixtes.

(a) Una estratègia mixta pot dominar estrictament una estratègia pura. Considerem l'exemple que es mostra en la Taula 2.27.

El jugador 1 no te cap estratègia pura estrictament dominada. Ara be, si el deixem utilitzar estratègies mixtes pot, per exemple, construir l'estratègia mixta $m_1 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ que domina estrictament a l'estratègia pura B. Per veur-ho, notem que el pagament pel jugador 1 quan utilitza l'estratègia B és

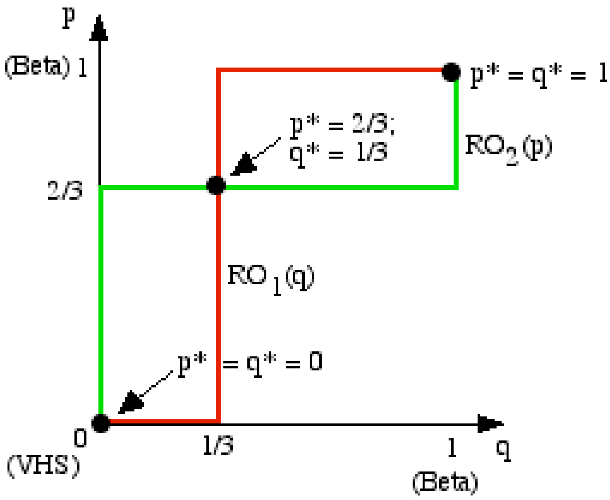

Figura 2.17: Equilibris en un joc de batalla de sexes

1/2	E	D
A	3,·	0,·
M	0,·	3,·
B	1,·	1,·

Taula 2.27: Dominància i estratègies mixtes (1).

1, amb independència de l'estratègia (pura o mixta) que utilitzi el jugador 2. En altres paraules, $u_1(B, \cdot) = 1$. Calculem ara el pagament (esperat) pel jugador 1 quan utilitza l'estratègia m_1 i el jugador 2 utilitza l'estratègia genèrica $m_2 = (q, 1 - q)$ on $q \in [0, 1]$:

$$Eu_1(m_1, m_2) = \frac{1}{2}(3q + 0(1 - q)) + \frac{1}{2}(0q + 3(1 - q)) = \frac{3}{2}.$$

Donat que $\frac{3}{2} > 1$, podem afirmar que pel jugador 1, l'estratègia mixta m_1 domina estrictament a l'estratègia pura B independentment de l'estratègia (pura o mixta) que utilitzi el jugador 2.

(b) Una estratègia pura pot ser la millor resposta a una estratègia mixta inclús si aquesta no és la millor resposta a cap altra estratègia pura. Considerem l'exemple de la Taula 2.28.

El jugador 1 no te cap estratègia pura estrictament dominada. Notem també l'estratègia B no és la millor resposta a cap estratègia pura del jugador 2.

1/2	E	D
A	3,·	0,·
M	0,·	3,·
B	2,·	2,·

Taula 2.28: Dominància i estratègies mixtes (2).

En particular, si el jugador 2 utilitzes E, la millor resposta del jugador 1 seria A; si el jugador 2 utilitzes D, la millor resposta del jugador 1 seria M.

Suposem que el jugador 2 utilitza una estratègia mixta $m_2 = (q, 1-q)$ on $q \in (1/3, 2/3)$. El pagament esperat del jugador 1 quan utilitza A és $Eu_1(A, m_2) = 3q$. El pagament esperat del jugador 1 quan utilitza M és $Eu_1(M, m_2) = 3(1-q)$. El pagament esperat del jugador 1 quan utilitza B és $Eu_1(B, m_2) = 2$.

Comparant aquests pagaments, el jugador 1 verifica que l'estratègia B és la millor resposta a l'estratègia m_2 del jugador 2.

Per concloure, recordem que si una estratègia s_i és estrictament dominada no hi ha cap conjunt de creences sobre les decisions estratègiques dels altres jugadors pel jugador i que faci òptim utilitzar l'estratègia s_i. La implicació en el sentit contrari també es verifica (sota certes condicions) si permetem l'ús d'estratègies mixtes: si no hi ha cap conjunt de creences sobre les decisions estratègiques dels altres jugadors que faci que jugar una certa estratègia s_i sigui òptim pel jugador i, aleshores existeix una altra estratègia (pot ser mixta) que domina estrictament a s_i. (Pearce (1984)).

2.4.7 Equilibri de Nash (2).

Una vegada examinades les estratègies mixtes i algunes de les seves propietats podem recuperar el teorema d'existència més important de dels jocs estàtics no cooperatius. Aquest és el teorema 2.5 que tornem a enunciar a continuació.

Teorema 2.6. *Tot joc amb un número finit de jugadors en el que cada jugador te un número finit d'estratègies pures, te al menys un equilibri de Nash, pot ser en estratègies mixtes.*

La demostració formal d'aquest teorema està més enllà de l'abast d'aquestes notes. Per donar però una idea intuïtiva del seu contingut considerarem un joc de dos jugadors amb dues estratègies pures cadascun d'ells. Quan el jugador 1 utilitzi una estratègia mixta la identificarem com $m_1 = (r, 1-r)$, $r \in [0, 1]$. Quan el jugador 2 utilitzi una estratègia mixta la identificarem com $m_2 = (q, 1-q)$, $q \in$

$[0, 1]$. Proporcionarem un argument gràfic per mostrar que aquest joc sempre te equilibri, a vegades en estratègies mixtes.

El joc en forma normal és el següent:

1/2	E	D
A	x,x’	y,z’
B	z,y’	w,w’

Taula 2.29: Existència d’equilibri de Nash (1).

Comencem mirant aquest joc des de la perspectiva del jugador 1. La seva matriu de pagaments és

1/2	E	D
A	x,·	y,·
B	z,·	w,·

Taula 2.30: Existència d’equilibri de Nash (2).

Ja hem vist que la caracterització d’una estratègia com (part de) equilibri consisteix en verificar que no hi ha desviacions profitosas. En el nostre cas doncs, les comparacions rellevants són entre x i z i entre y i w.

Els casos possibles són:

(i) $x > z$ i $y > w$,

(ii) $x < z$ i $y < w$,

(iii) $x > z$ i $y < w$,

(iv) $x < z$ i $y > w$,

(v) $x = z$ o $y = w$,

(vi) $x = z$ i $y = w$,

Es evident que el cas (i) implica que A domina estrictament a B, i el cas (ii) implica que B domina estrictament a A. En altres paraules, en el cas (i) el jugador 1 sempre utilitzara l’estratègia A independentment del que faci el jugador 2. Formalment, $r^*(q) = 1$ o de forma equivalent $RO_1(q) = A$. En el cas (ii) el jugador 1 sempre utilitzara l’estratègia B independentment del que faci el jugador 2. Formalment, $r^*(q) = 0$ o de forma equivalent $RO_1(q) = B$. Aquestes funcions de resposta òptima es mostren en els apartats (i) i (ii) de la Figura 2.18.

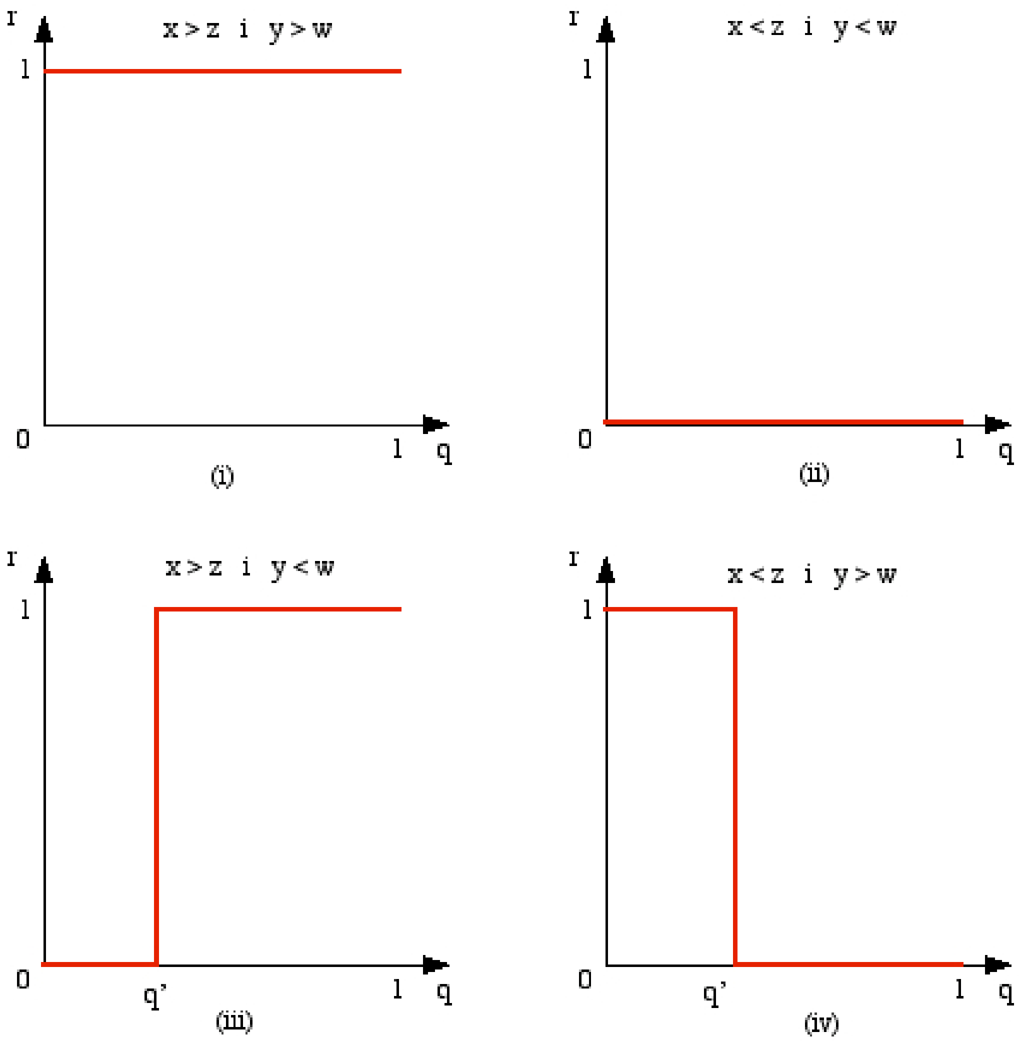

Figura 2.18: Existència d'equilibri de Nash (1)

Mirem a continuació el cas (iii). El pagament esperat pel jugador 1 quan els jugadors utilitzen les estratègies m_1 i m_2 és

$$\begin{aligned} Eu_1(r,q) =& r[qx+(1-q)y]+(1-r)[qz+(1-q)w] = \\ =& r[q(x-y+w-z)+y-w]+q(z-w)+w. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Donat que l'objectiu del jugador és maximitzar aquesta funció, derivem la condició de primer ordre.

$$\frac{\partial Eu_1(r,q)}{\partial r} = q(x-y+w-z)+y-w, \tag{2.3}$$

que s'iguala a zero pel valor de $q = \dfrac{w-y}{x-z+w-y} \overset{\text{def}}{=} q'$. Així doncs, la funció de resposta òptima és (veure secció (iii) de la figura 2.18).

$$RO_1(q) = \begin{cases} A & \text{si} \quad q \in (q',1], \\ r \in [0,1] & \text{si} \quad q = q', \\ B & \text{si} \quad q \in [0,q'). \end{cases}$$

La funció objectiu del jugador 1 en el cas (iv) torna a ser (2.2), de manera que el valor de referència continua essent q', que de forma equivalent podem reescriure com $q' \overset{\text{def}}{=} \dfrac{y-w}{z-x+y-w}$. Observem que,

$$q > q' \iff q(z-x+y-w)+y-w < 0.$$

A partir de (2.3) podem concloure que,

$$q > (<) q' \Longrightarrow \frac{\partial Eu_1(r,q)}{\partial r} < (>) 0.$$

Així quan $q > (<) q'$ el jugador 1 maximitza el seu pagament esperat a la cantonada $r = 0$ $(r = 1)$ que es tradueix en la selecció de l'estratègia pura B (A). Podem doncs construir la funció de millor resposta (veure secció (iv) de la figura 2.18).

$$RO_1(q) = \begin{cases} B & \text{si} \quad q \in (q',1], \\ r \in [0,1] & \text{si} \quad q = q', \\ A & \text{si} \quad q \in [0,q'). \end{cases}$$

El cas (v) conté de fet dos situacions simètriques $x = z$ o be $y = w$. Considerem el cas $x = z$. La matriu de pagaments es redueix a Ara l'estratègia A

1/2	E	D
A	x,·	y,·
B	x,·	w,·

Taula 2.31: Existència d’equilibri de Nash (3).

domina estrictament a l’estratègia B si $qx + (1-q)y > qx + (1-q)w$ és a dir si $y > w$, i en el cas contrari l’estratègia B domina estrictament a l’estratègia A.

Per tant, si $y > w$ i A és una estratègia estrictament dominant aquest cas és equivalent al cas (i). De forma similar, si $y < w$ i B és l’estratègia estrictament dominant aquest cas és equivalent al cas (ii).

Finalment el cas (vi) representa que el jugador 1 sempre és indiferent entre les estratègies A i B (i qualsevol estratègia mixta m_1).

A continuació hem de fer l’anàlisi pel jugador 2. La seva matriu de pagaments és

1/2	E	D
A	·,x’	·, z’
B	·, y’	·, w’

Taula 2.32: Existència d’equilibri de Nash (3).

Ara les comparacions rellevants són entre x' i z' i entre y' i w'.

Els casos possibles són:

(i) $x' > z'$ i $y' > w'$,

(ii) $x' < z'$ i $y' < w'$,

(iii) $x' > z'$ i $y' < w'$,

(iv) $x' < z'$ i $y' > w'$,

(v) $x' = z'$ o $y' = w'$,

(vi) $x' = z'$ i $y' = w'$,

La figura 2.19 mostra les funcions de resposta òptima en cada una d’aquestes combinacions. Finalment, si combinem qualsevol funció de resposta òptima del jugador 1 amb qualsevol funció de resposta òptima del jugador 2 (i hi ha 16 possibles) trobarem al menys una intersecció. Veiem-ho:

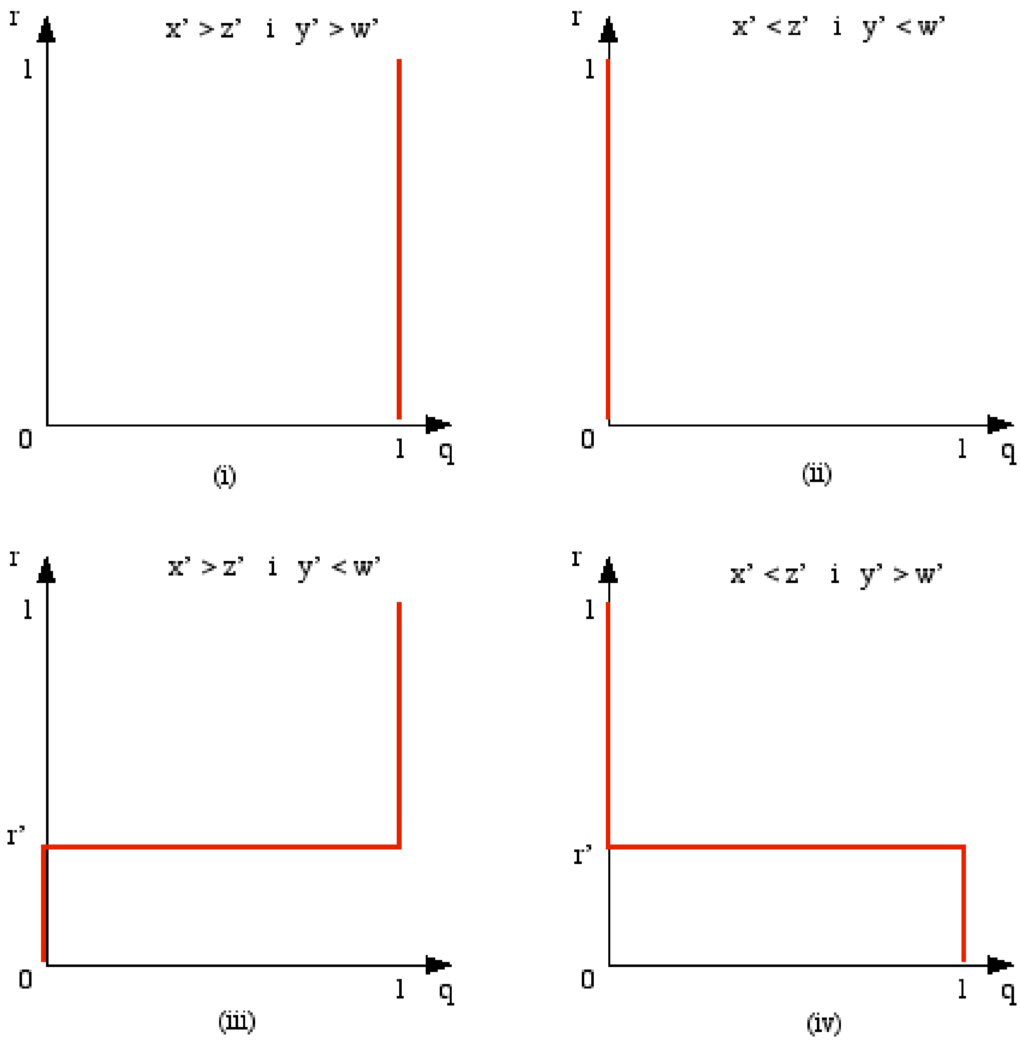

Figura 2.19: Existència d'equilibri de Nash (2)

(a) combinant (i) o (ii) de 1 amb qualsevol funció de resposta òptima de 2 obtenim una intersecció única que caracteritza un únic equilibri en estratègies pures. (Identifiquem així 8 dels casos possibles).

(b) combinant (iii) o (iv) de 1 amb (i) o (ii) de 2 obtenim una intersecció única que caracteritza un únic equilibri en estratègies pures. (Identifiquem així 4 dels casos possibles).

(c) combinant (iii) de 1 amb (iv) de 2 (i vice-versa) obtenim una intersecció única que caracteritza un únic equilibri en estratègies mixtes. (Identifiquem així 2 dels casos possibles).

(d) combinant (iii) de 1 amb (iii) de 2 o be (iv) de 1 amb (iv) de 2 caracteritzem una situació amb multiplicitat d'equilibris. En particular, trobem un equilibri en estratègies mixtes i dos equilibris en estratègies pures. (Identifiquem així 2 dels casos possibles).

2.5 Exercicis

1. Sea el juego en forma normal $G = \{S_1 = \{A, M, B\}, S_2 = \{I, C, D\}, u_1, u_2\}$ cuyos pagos estn resumidos en la matriz de pagos:

	I	C	D
A	4,4	1,1	1,0
M	1,2	0,3	2,3
B	0,1	0,0	0,-1

   Calcular los equilibrios de Nash, y los equilibrios que se obtienen del proceso de eliminación sucesiva de estrategias estrictamente y débilmente dominadas en este juego. Comentar. Escribir el juego en forma extensiva.

2. Sean $G = \{S_i, u_i\}$ y $G' = \{S_i, u_i'\}$ con $i = 1, \cdots, n$ dos juegos en forma normal donde para cada $i \in I$, $u_i' = \alpha_i + \beta_i u_i$ $(\beta_i > 0)$. Demostrar que los equilibrios de Nash de G y G' coinciden. (En otras palabras, que transformaciones afines positivas de las funciones de pagos no cambian el conjunto de equilibrios de Nash).

3. Hallar las estrategias y los pagos de equilibrio de los juegos siguientes donde hay tres jugadores, $S_1 = \{a, b\}$, $S_2 = \{A, B\}$, $S_3 = \{\alpha, \beta\}$ y las matrices de pago presentan los pagos de los jugadores las distintas combinaciones de estrategias, en el orden (u_1, u_2, u_3):

   (a)

	α		β	
	A	B	A	B
a	1,1,1	0,0,0	0,0,0	0,0,0
b	0,0,0	0,0,0	0,0,0	2,2,2

   (b)

	α		β	
	A	B	A	B
a	1,1,-1	0,0,0	3,3,-6	0,0,0
b	0,0,0	4,4,-8	0,0,0	1,1,-2

4. Sea el juego en forma normal $G = \{S_1 = \{A, M, B\}, S_2 = \{I, C, D\}, u_1, u_2\}$ cuyos pagos están resumidos en la matriz de pagos:

	I	C	D
A	2,0	1,1	4,2
M	3,4	1,2	2,3
B	1,3	0,2	3,0

Calcular los equilibrios de Nash (en estrategias puras), y los equilibrios que se obtienen del proceso de eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas en este juego.

5. En el juego,

J1/J2	I	D
A	0,0	0,1
B	1,0	0,0

mostrar que si eliminamos de forma iterativa estrategias **dominadas** (no estrictamente), podemos obtener resultados distintos según el orden en el que eliminemos las estrategias.

6. Consideremos el juego en forma normal definido por: $I = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0, 100]$,

$$u_1(s_1, s_2) = 25s_1 - 4(s_1)^2 + 15s_1s_2$$
$$u_2(s_1, s_2) = 100s_2 - 50s_1 - (s_2)^2 - s_1s_2.$$

   a) Hallar los equilibrios de Nash de este juego y representar las correspondencias de mejor respuesta.
   b) Representar los equilibrios gráficamente.

7. Escribir en forma normal el juego de duopolio de Bertrand, en el que participan dos empresas que venden bienes diferenciados. Cada empresa i elige el precio p_i de su producto, sabiendo que la cantidad demandada de producto a la empresa i por los consumidores es:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j,$$

donde a y b son parmetros, $a, b > 0$.

   a) Hallar los equilibrios de Nash (en estrategias puras) de este juego y representar las correspondencias de mejor respuesta.
   b) Representar los equilibrios gráficamente.

8. Supongamos que en la batalla de los sexos siguiente, los pagos significan billetes de mil pesetas:

El/Ella	Fútbol	Teatro
Fútbol	3,1	0,0
Teatro	0,0	1,3

a) Representar la forma extensiva del juego.

b) Calcular los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas, y sus respectivos pagos.

Consideremos ahora la siguiente modificación del juego: antes de que tanto él como ella decidan (simultáneamente) si ir al fútbol o al teatro, él puede quemar un billete de mil (en presencia de ella).

c) Representar la forma extensiva de este juego.

d) Encontrar las estrategias puras de los dos jugadores.

e) Representar el juego en forma normal.

f) Encontrar los equilibrios de Nash (y sus pagos) después de eliminar sucesivamente las estrategias estrictamente dominadas.

g) Comentar.

9. Hallar las estrategias de equilibrio (en puras y mixtas) del juego:

J1/J2	A	B
a	5,-5	4,5
b	2,-2	4,-4

10. Hallar los equilibrios en estrategias mixtas de los juegos del ejercicio 3.

11. Consideremos la siguiente versión de la batalla de los sexos:

J1/J2	O	B
o	3,1	0,0
b	a,0	1,3

donde $0 < a < 1$.

a) Calcular el equilibrio de Nash en estrategias mixtas en funcin de a (es decir, sean $x(a)$ e $y(a)$ las probabilidades de equilibrio de que el jugador 1 y el jugador 2 vayan a la ópera).

b) Comprobar que la derivada de $x(a)$ respecto de a es nula y que la derivada de $y(a)$ respecto de a es positiva.

c) Sean $Eu_1(a)$ y $Eu_2(a)$ los pagos esperados en equilibrio en función de a. Comprobar que $Eu_1(a)$ es creciente en a y que $Eu_2(a)$ es independiente de a.

d) Comentar.

12. Sea el juego en forma normal $G = \{S_1 = \{A, M, B\}, S_2 = \{I, C, D\}, u_1, u_2\}$ cuyos pagos están resumidos en la matriz de pagos:

	I	C	D
A	1,-1	6,-6	0,0
M	2,-2	0,0	3,-3
B	3,-3	2,-2	4,-4

Calcular los equilibrios de Nash (en estrategias mixtes).

13. Hallar los equilibrios de Nash es estrategias mixtas del dilema del prisionero.

14. Hallar las estrategias de equilibrio (en mixtas) del siguiente juego:

J1/J2	I	D
A	2,1	0,2
B	1,2	3,0

15. Dos pájaros de la misma especie compiten por un territorio. Cada pájaro puede adoptar una estrategia de halcón o de paloma en un juego simultáneo con información completa. Si ambos adoptan el comportamiento de paloma se reparten el territorio; si uno adopta el de halcón y otro el de paloma, el primero se queda con el territorio; si ambos adoptan la estrategia de halcón hay lucha, y a pesar de que cada uno tiene una cierta probabilidad de vencer y quedarse con el territorio, la lucha implica costes. Las ganancias son:

J1/J2	Paloma	Halcón
Paloma	1,1	0,2
Halcón	2,0	-1,-1

Calculad los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

16. Escribir las funciones de mejor respuesta de cada jugador y hallar las estrategias y los pagos de equilibrio del juego siguiente donde hay tres jugadores, $S_1 = \{a, b\}$, $S_2 = \{A, B\}$, $S_3 = \{\alpha, \beta\}$ y las matrices de pago presentan los pagos de los jugadores las distintas combinaciones de estrategias, en el orden (u_1, u_2, u_3):

	α		β	
	A	B	A	B
a	1,1,-1	0,0,0	2,1,-2	0,0,0
b	0,0,0	4,2,0	0,0,0	2,2,2

17. Sea el juego en forma normal $G = \{S_1 = \{A, M, B\}, S_2 = \{I, C, D\}, u_1, u_2\}$ cuyos pagos estn resumidos en la matriz de pagos:

	I	C	D
A	2,0	1,1	4,1
M	3,4	1,5	2,5
B	1,3	0,2	2,5

a) Calcular los equilibrios de Nash (en estrategias mixtas).

b) Representar las correspondencias de mejor respuesta.

c) Comentar.

18. Dos estudiantes del aula se escogen al azar y se les propone el juego siguiente. Cada uno tiene la posibilidad de poner 0 o 100 pesetas en una bolsa (no transparente). Después de que cada estudiante haya tomado su decisión sin conocer la decisión del otro estudiante, se reparte el contenido de la bolsa de papel mitad y mitad entre ambos estudiantes. El juego sólo se juega una vez.

(a) Escribir el juego en forma extensiva y en forma normal.

(b) Calcular los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.

19. Consideremos el juego de los cerdos racionales. Los jugadores son dos cerdos inteligentes como los de la granja animal de Orwell. Ambos cerdos se encuentran al extremo de un pasillo. Cada uno de ello puede accionar una palanca que permite acceder a una habitación, al final del pasillo, donde se encuentra un bol con alimento para cerdos. El cerdo que acciona la palanca debe correr hasta el otro extremo del pasillo, pero para cuando llega el otro cerdo ya ha llegado y ha empezado a comer. Hay un cerdo dominante (jugador 1) y un cerdo subordinado (jugador 2). Ello quiere decir que el cerdo dominante siempre puede garantizarse el pienso que hay en la habitación una vez llega a ella. Supongamos que hay 6 unidades de pienso en el bol. Cada unidad consumida de piensosupone un aumento de peso de 1 Kg. Si sólo el cerdo subordinado acciona la palanca, el cerdo dominante se come las seis unidades puesto que llega primero. Si sólo el cerdo dominante acciona la palanca, el cerdo subordinado llega antes y se come 5 de las seis unidades antes de que llegue el cerdo dominante. Si, por último, ambos cerdos accionan la palanca simultáneamente, suponemos que el cerdo subordinado corre más rápido y consigue consumir dos unidades antes de que llegue el cerdo dominante. Accionar la palanca tiene un coste que podemos medir en términos de peso y que representa una pérdida de 0.5 Kg. de peso

para cualquiera de los cerdos. El objetivo de los cerdos es maximizar su peso.

(a) Escribir el juego en forma extensiva y en forma normal.

(b) Calcular los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.